

Statistische Methoden beim Entwurf von Segelflugzeugen der Standardklasse

Dipl.-Ing. Ingo Herbst
Vortrag auf dem XI. OSTIV-Kongress
in Leszno, Juni 1968

Durch die Einführung der Segelflugzeug-Standardklasse für internationale Wettbewerbe wurden Konstrukteure in der ganzen Welt dazu angeregt, Segel-

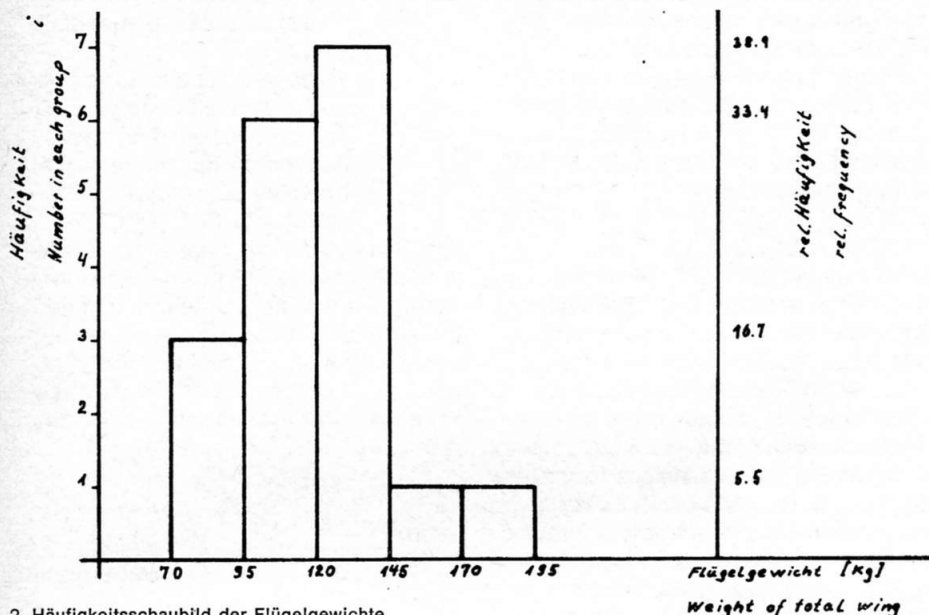
flugzeuge gemäss den Anforderungen der FAI an Standardsegelflugzeuge zu bauen. Trotz den Festlegungen der FAI blieb den Segelflugzeugbauern bei ihrem Streben nach hohen Flugleistungen ein weiteres Betätigungsfeld offen. Da das Ziel bei allen Entwürfen der Standardklasse gleich ist, wäre zu er-

warten, dass sich die Ergebnisse weitgehend ähneln. Da dies nicht der Fall ist, interessiert der Grund für diese Nicht-Uebereinstimmung. Für den Konstrukteur des Neuentwurfes ist es wesentlich zu wissen, ob sein Entwurf in einzelnen Punkten mit vorhandenen Erfahrungswerten übereinstimmt, oder ob er wesentlich vom Ueblichen abweicht. Es ist also wichtig, schon im ersten Entwurfsstadium gewisse Daten, möglichst gut geschätzt, zu kennen, um Fehlentwicklungen weitgehendst auszuschalten.

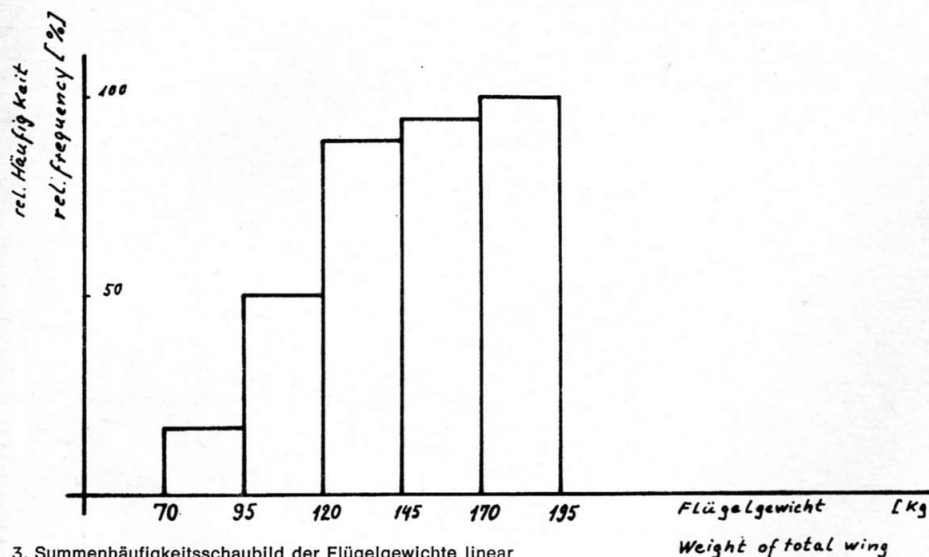
Das Entwicklungsteam des Ganzmetall-Standard-Segelflugzeuges B4-Küppers-Reinke-Herbst begann seine Entwicklungsarbeiten mit einigen statistischen Untersuchungen, die später weiter ausgearbeitet wurden und von denen hier einige dargestellt werden. Will man gesicherte statistische Angaben machen, benötigt man theoretisch eine unendlich grosse Anzahl von Werten. Es stehen jedoch mathematische Methoden zur Verfügung, die es erlauben, auch bei einer endlichen Anzahl von Werten Aussagen bekannter Wahrscheinlichkeit zu machen. Bisher übliche und angewendete Auswerteverfahren (Lit. 1) gingen vor allem von graphischen Auftragungen in einem einfachen Koordinationsystem aus, in das bisweilen Parameter eingetragen werden. Diese Verfahren haben den Vorteil eines offensichtlich schnellen Ueberblicks, bringen jedoch eine Reihe von Nachteilen mit sich, wenn man sich auf die graphische Darstellung von Punkthaufen in Diagrammen beschränkt, durch die man dann Kurven oder Kurvenscharen zu ziehen versucht. Ausserdem sagen sie nichts über die Zuverlässigkeit der Werte aus. Es wurde daher versucht, durch die Benutzung statischer Methoden genauere Resultate zu erzielen. Die aus zugänglicher Literatur Lit (2), Lit (3), eigenen Aufzeichnungen und Luftfahrtzeitschriften gewonnenen Daten wurden zusammengestellt und dann zunächst einer einfachen Auswertung unterzogen. Dazu wurden die bekannten Werte im allgemeinen in fünf Klassen aufgeteilt und den einzelnen Klassen zugeordnet. Dazu sei als Beispiel hier das Flügelgewicht herangezogen. Die Flügelgewichte streuten in der Wertetabelle zwischen 78 und 188 kg. Dementsprechend wurde eine Klasseneinteilung vorgenommen (Fig. 1). Die Werte in Spalte 5 ergeben bei Auftragung über dem Flügelgewicht (Fig. 2) ein Histogramm (Säulendiagramm), das bereits einen Schluss auf die Art der Verteilung zulässt. In erster Annäherung lässt sich der Verlauf der bekannten Gauss'schen Glockenkurve durch dieses Histogramm ziehen. Bildet man die Summenprozentwerte (Spalte 6), indem man laufend die Pro-

1	2	3	4	5	6
class	interval	dimension	frequency	%	Σ %
1	70 ... 95	Kg		16.7	16.7
2	95.1 ... 120	Kg		33.4	50.1
3	120.1 ... 145	Kg		38.9	89.0
4	145.1 ... 170	Kg		5.5	94.5
5	170.1 ... 195	Kg		5.5	100.0
				100.0	

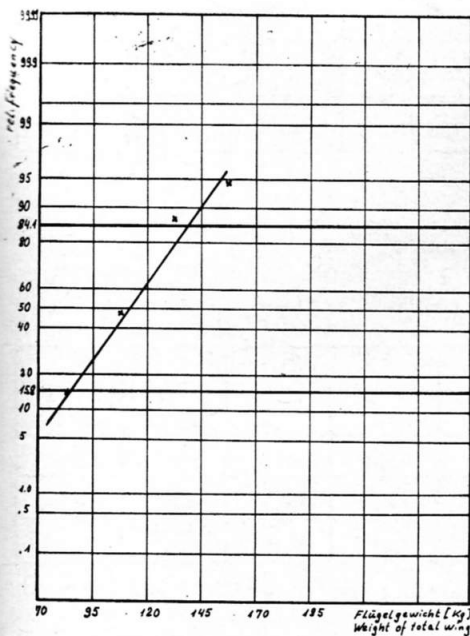
1. Auswertung der Flügelgewichte von Standardsegelflugzeugen
Wing weights of Standard class sailplanes grouped in class intervals



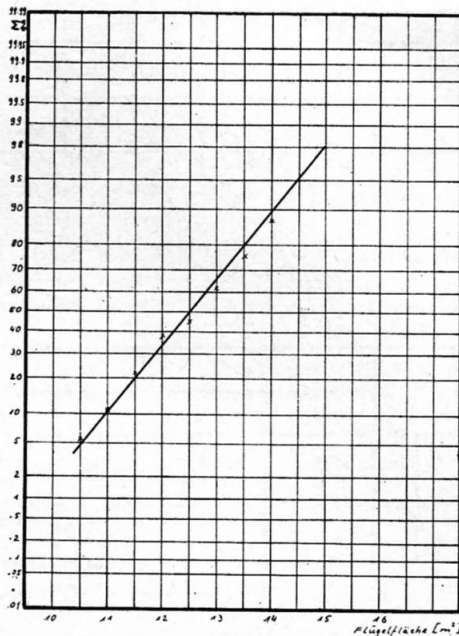
2. Häufigkeitsschaubild der Flügelgewichte
Frequency diagram of wing weights



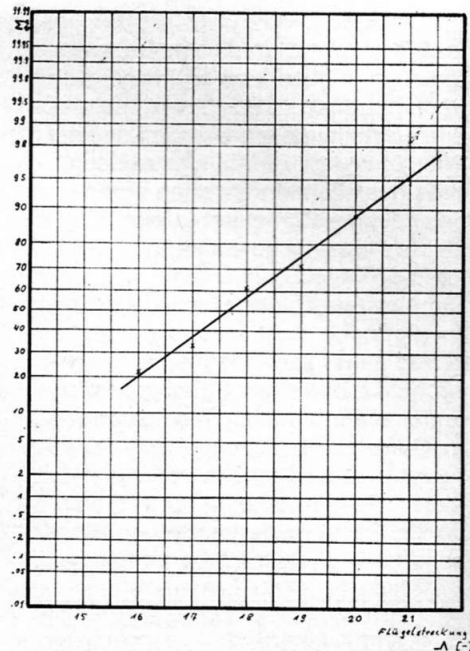
3. Summenhäufigkeitsschaubild der Flügelgewichte linear
Cumulative Frequency diagram of wing weights, linear



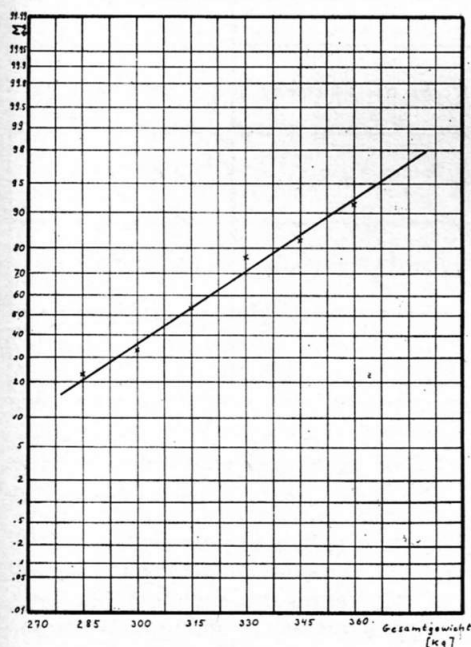
4. Summenhäufigkeitsschaubild der Flügelgewichte im Gauss'schen Wahrscheinlichkeitsnetz
Cumulative Frequency diagram of wing weights on Gaussian probability paper



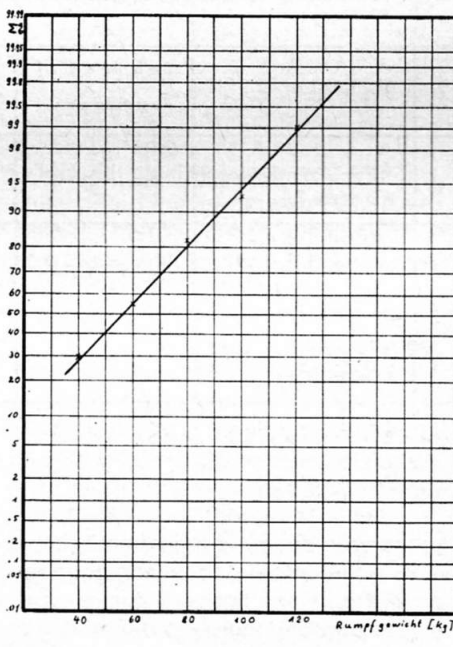
5. Summenhäufigkeitsschaubild Flügelfläche im Gauss'schen Wahrscheinlichkeitsnetz
Cumulative Frequency diagram of wing area in Gaussian probability paper



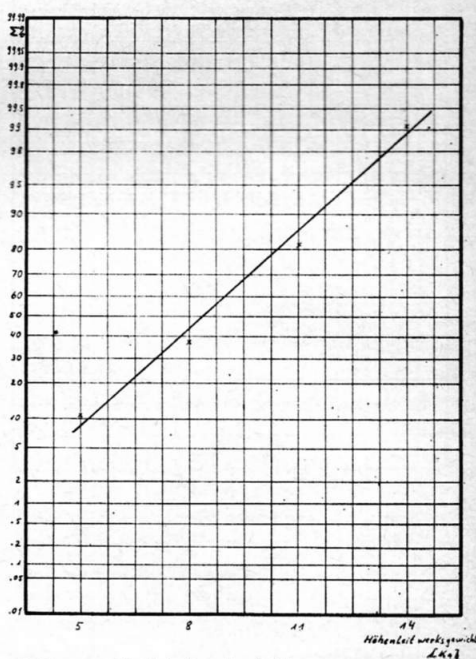
6. Summenhäufigkeitsschaubild Flügelstreckung
Cumulative Frequency, aspect ratio



7. Summenhäufigkeitsschaubild Gesamtgewicht
Cumulative Frequency, all up weight



8. Summenhäufigkeitsschaubild Rumpfgewicht
Cumulative Frequency, weight of fuselage



9. Summenhäufigkeitsschaubild Höhenleitwerksgewicht
Cumulative Frequency horizontal tail weight

zente in den einzelnen Klassen summiert, kann man ein neues Histogramm zeichnen (Fig. 3), das Summenhäufigkeitsschaubild.

Trägt man die Werte aus Spalte 6 in Wahrscheinlichkeitspapier, das entsprechend der Gauss'schen Fehlerverteilungsfunktion geteilt ist, über den Klassenmitten ein, erhält man Punkte, durch die sich bei Vorliegen einer Normalverteilung nach Gauss eine Gerade ziehen lässt (Fig. 4 bis Fig. 11). Im vorliegenden Falle ist das bei allen untersuchten Werten der Fall gewesen, was bedeutet, dass die Entwurfsparameter der Standardsegelflugzeuge zufällig verteilt sind!

Hieraus kann geschlossen werden, dass eine strenge Optimierung der Segelflugzeuge bisher nicht erfolgt war,

da die Streuungen noch beachtliche Werte aufweisen (Fig. 4 bis 11). Aus diesen so gewonnenen Diagrammen lassen sich mit ausreichender Genauigkeit folgende Aussagen gewinnen:

Der arithmetische Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

kann unter dem 50 %-Wert abgelesen werden. Die Standardabweichung kann aus dem Diagramm ebenfalls abgelesen werden. Sie liegt unter den Werten für 84,13 % und 15,87 %. In der Normalverteilung als Glockenkurve dargestellt entspricht das der Stelle grösster Steigung bzw. der Stelle, an der die Krümmung sich ändert.

Mittels arithmetischem Mittelwert $\bar{x}$

und Standardabweichung u lässt sich die Gerade auf dem Wahrscheinlichkeitspapier bereits zeichnen. Diese beiden Werte beschreiben die Kurve mathematisch genau.

Zur Anschaulichkeit sei noch erwähnt, dass bei der Angabe $y = \bar{x} \pm a$ mit $a = u$ nur jeder 3. Wert ausserhalb dieses Bereiches liegt, mit $a = 2u$ nur jeder 23. Wert, mit $a = 3u$ fällt nur jeder 371. Wert aus dem Bereich heraus! Für die hier angestellten Untersuchungen ist also eine Angabe des arithmetrischen Mittels plus oder minus drei Standardabweichungen voll ausreichend, da dadurch 99,865 % aller Werte überdeckt werden.

Diese Werte kann man als Beschreibung des Gesamtumfanges der möglichen Werte benutzen. Die Angabe von

$\bar{x} \pm 3u$ besagt, dass man 99,865 % aller Werte zwischen diesen Grenzwerten suchen kann, was praktisch gleichbedeutend ist mit der Sicherheit, dass alle Werte in diesen Grenzen liegen. Wichtig ist hier darauf hinzuweisen, dass aus allen Mittelwerten unterschiedlicher Parameter keinesfalls das ideale Flugzeug gewonnen werden kann.

Die Aussagefähigkeit dieser Werte befriedigt noch nicht vollständig, und es wurde daher nach Möglichkeiten gesucht, die einzelnen Parameter miteinander zu verbinden, um so einen formelmässigen Zusammenhang der Parameter zu erhalten. Es boten sich hierzu die Methoden der in verschiedenen Gebieten der modernen Wissenschaften eingesetzten Regressions-

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
—	x_1	x_2	y	$(1) \cdot (2) \cdot (3)$	$x_1 - \bar{x}_1$	$x_2 - \bar{x}_2$	$y - \bar{y}$	$(5) \cdot (7)$	$(6) \cdot (7)$	$(5) \cdot (6)$	$(5)^2$	$(6)^2$	$(7)^2$
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													

$$y = \bar{y} + b_1(x_1 - \bar{x}_1) + b_2(x_2 - \bar{x}_2) =$$

$$b_1 = [\Sigma(12) \cdot \Sigma(8) - \Sigma(10) \cdot \Sigma(9)] : [\Sigma(11) \cdot \Sigma(12) - (\Sigma(10))^2]$$

$$b_2 = [\Sigma(11) \cdot \Sigma(9) - \Sigma(10) \cdot \Sigma(8)] : [\Sigma(11) \cdot \Sigma(12) - (\Sigma(10))^2]$$

12. Rechenschema
Calculation schema

		FoKa		K6E		Phoebus		B4	
		eff.	calc.	eff.	calc.	eff.	calc.	eff.	calc.
ℓ_0	m	3.8	3.78	4.04	3.96	4.13	3.96	3.5	3.9
W_w	kg	128	115.8	112	108	146	146.4	138	141
W_T	kg	8.9	9.4	7.8	8.2	9.0	9.8	8.9	9.5

ℓ_0 = distance $\ell/4$ line Wing to $\ell/4$ line Vertical tail

W_w = Weight of Wing

W_T = Weight of Horizontal Tail

13. Vergleichswerte zwischen Rechnung und wirklichen Werten
Comparison between calculated and actual data

	1	2	3	4
a	Variance	Degrees of Freedom	Sum of Squares	Mean Square
b	Regression Formula	$n_1 = p$	$\ell_1 \cdot S_{1y} + \ell_2 \cdot S_{2y}$	$(3b) : (2b)$
c	Deviations	$n_2 = n - p - 1$	$S_{yy} - \ell_1 S_{1y} - \ell_2 S_{2y}$	$(3c) : (2c)$
d	Total	$n_1 + n_2$	S_{yy}	—

Analysis of Variance

$$F = (4b) : (4c)$$

rechnungen an, mit denen es möglich ist, zwischen einer Anzahl von gegebenen Werten einen linearen Zusammenhang anzugeben, der eine definierte Wahrscheinlichkeit hat. Die einfachste Form solcher Rechnungen führt zu Gleichungen der Form

$$y = \bar{y} + b(x - \bar{x}),$$

also mit einer abhängigen und einer unabhängigen Variablen. Dieses erschien im vorliegenden Falle nicht ausreichend. Es wurden daher Gleichungen

$$y = \bar{y} + b_1(x_1 - \bar{x}_1) + b_2(x_2 - \bar{x}_2),$$

also mit zwei unabhängigen Variablen berechnet. Versuchsweise wurde mit mehr unabhängigen Variablen gerechnet, doch wird der Rechenprozess dabei so langwierig, dass er ohne Rechenmaschinen nur mit erheblichem Zeitaufwand zu bewältigen ist.

Das verwendete Verfahren, das für diese Zwecke wohl erstmalig benutzt wurde, ist unter dem Namen mehrfache lineare Regression in der Literatur bekannt.

14. Streuungszerlegung zur Prüfung der Gültigkeit der errechneten Daten
Analysis of variance as test of calculated data

Man kann z. B. die Frage stellen, in welcher Form das Flügengewicht von der Flügelstreckung und dem Flugzeugsgesamtgewicht abhängt. Die Auswahl der Parameter ist hier natürlich in das geschickte Ermessen des Ingenieurs gestellt. Bei Berücksichtigung einer grösseren Anzahl von Parametern wäre das nicht so wesentlich. Es galt jedoch mit vertretbarem Aufwand brauchbare Ergebnisse zu erzielen! Mit dem in Fig. 12 gezeigten Schema lassen sich alle erforderlichen Werte berechnen. Die Tabelle ist selbsterklärend.

Da in der Tabelle einige Abkürzungen erforderlich waren, sind die Erklärungen in Fig. 15 gegeben.

Formula:

n_1 = number of independent variables

n = total number of values

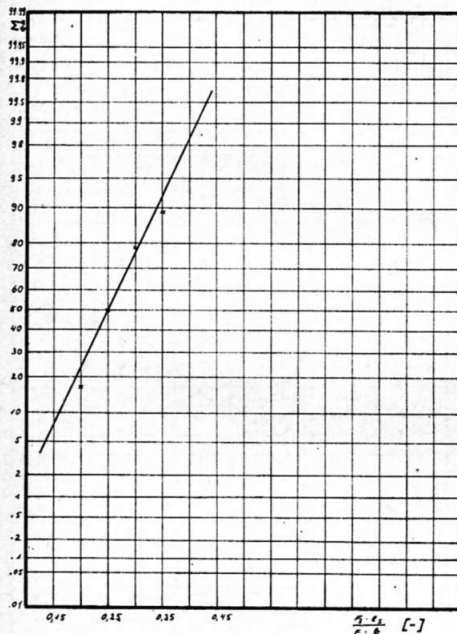
$$S_{yy} = \Sigma(y - \bar{y})^2$$

$$S_{1y} = \Sigma(x_1 - \bar{x}_1) \cdot (y - \bar{y})$$

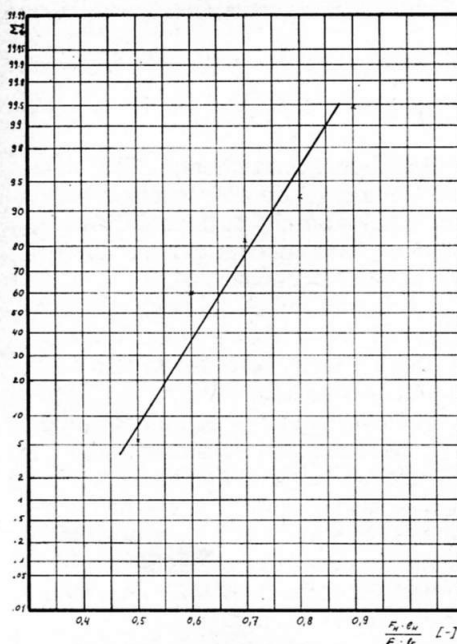
$$S_{2y} = \Sigma(x_2 - \bar{x}_2) \cdot (y - \bar{y})$$

Fig. 15

Der Vollständigkeit halber sei die Ableitung hier angegeben:



10. Summenhäufigkeitsschaubild
Volumenkoeffizient Seitenleitwerk
Cumulative Frequency
Vertical tail Volume coefficient



11. Summenhäufigkeitsschaubild
Höhenleitwerksvolumenkoeffizient
Cumulative Frequency
Horizontal tail volume coefficient

$$(1) Y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

Es ist zu fordern, dass die Summe der Quadrate der Abweichungen zwischen den beobachteten Werten y_i und den zugehörigen Regressionswerten Y_i ein Minimum wird.

$$(2) \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2 = \text{Minimum}$$

(1) und (2) eingesetzt ergibt

(3) $S(y - a - b_1 x_1 - b_2 x_2)^2 = \text{Minimum}$
Durch Ableiten von (3) nach a , b_1 , b_2 erhält man drei Gleichungen, die nach Umformung wie folgt aussehen:

$$(4a) \bar{y} - a - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2 = 0$$

$$(4b) Sx_1 y - a T_1 - b_1 Sx_1^2 - b_2 Sx_1 x_2 = 0$$

$$(4c) Sx_2 y - a T_2 - b_1 Sx_1 x_2 - b_2 Sx_2^2 = 0$$

Aus 4. a) ergibt sich:

$$(5) a = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2 \quad \text{und damit}$$

$$(6) Y = \bar{y} + b_1 (x_1 - \bar{x}_1) + b_2 (x_2 - \bar{x}_2)$$

Nach Multiplikation von 4a mit T_1 und Subtraktion des Ergebnisses von 4b findet man

$$(7a) b_1 S_{11} + b_2 S_{12} = S_{1y}$$

Entsprechend ergibt sich aus 4a und 4c

$$(7b) b_1 S_{12} + b_2 S_{22} = S_{2y}$$

und damit

$$b_1 = (S_{22} \cdot S_{1y} - S_{12} S_{2y}) / (S_{11} S_{22} - S_{12}^2)$$

$$b_2 = (S_{11} \cdot S_{2y} - S_{12} S_{1y}) / (S_{11} S_{22} - S_{12}^2)$$

b_1 und b_2 sind die sogenannten mehrfachen Regressionskoeffizienten.

Fig. 12 liefert alle erforderlichen Daten und ermöglicht damit das Anschreiben der gesuchten Formel. Der Rechenaufwand lag bei guter Übung bei etwa 3–4 Stunden für eine Durchrechnung. Wesentlich ist nun noch die Überprüfung der so gewonnenen Aussage hinsichtlich ihrer Zuverlässigkeit. Dies ist möglich mittels einer Streuungszerlegung, deren Schema in

Fig. 16 gibt Werte F für verschiedene Wahrscheinlichkeiten P bei $n_1 = 2$ (2 wie unabhängige Variable) und verschiedene n_2 (Werteanzahl).

Für die verwendeten Untersuchungen, von denen hier nur einige Ergebnisse angegeben werden, wurden folgende Parameter verwendet:

Seitenruderhebelarm l_s (1/4 – Punkt Flügel – 1/4 – Punkt Seitenleitwerk)	G_{HLLW}
Höhenruderhebelarm l_u (1/4 – Punkt Flügel – 1/4 Punkt Höhenleitwerk)	G_{FL}
Höhenleitwerksgewicht	F_s
Flügelgewicht	F_{HLLW}
Seitenleitwerksfläche	G_{ges}
Höhenleitwerksfläche	λ
Gesamtgewicht	
Flügelstreckung	

Folgende Formeln wurden u. a. ermittelt:

$$\begin{aligned} 1. \quad l_s &= 5,356 - 0,059 \lambda - 0,325 F_s \\ 2. \quad G_{FL} &= 117,1 - 0,494 \lambda + 0,755 G_{ges} \\ 3. \quad G_{HLLW} &= 10,45 + 0,353 \lambda + 0,041 G_{ges} \\ 4. \quad l_{II} &= 2,63 + 0,031 \lambda + 0,328 F_{II} \end{aligned}$$

Durch den oben angegebenen Test wurde die Gültigkeit dieser Formeln überprüft. Sie liegt bei den Formeln 1 bis 3 bei mehr als 90 %. Das heisst, von 100 Flugzeugentwürfen werden 90 durch diese Formeln erfasst. Die Formel 4 konnte nicht bestätigt werden, was physikalisch auch zu erwarten ist. Selbstverständlich können diese Formeln nicht die Daten extremer Neuentwürfe abdecken. Sie können jedoch den Konstrukteur zum Beispiel bei der Ermittlung von flugmechanischen Parametern vor Fehlgriffen schützen und sie können weiter das technisch erreichbare Ziel zum Beispiel bei den Gewichten aufzeigen. Ein Flügel, dessen Gewichte wesentlich oberhalb der

fluss verschiedener Bauweisen bei der Ermittlung von Gewichtszusammenhängen bei Flugzeugen ähnlicher Festigkeitsklassen nicht zutage tritt. Die hier verwendete Methode lässt sich selbstverständlich auch auf andere Bereiche, z. B. die offene Klasse anwenden, doch wird die Auswahl der statistischen Werte durch die möglichen Variationen dieser Segelflugzeuge sehr stark erschwert.

Zusammenfassung

Es wird eine Möglichkeit angegeben, statistische Methoden beim Entwurf von Segelflugzeugen zu verwenden. Die angegebene Methode erlaubt es, bei neuen Entwürfen den Zusammenhang von verschiedenen Parametern auf seine Richtigkeit hin an Hand vorliegender statischer Daten zu überprüfen und Aussagen über die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit zu machen.

Der Konstrukteur hat dadurch Mittel, seinen Entwurf genau an vorhandenen Flugzeugen zu messen und festzustellen, ob bestimmte Parameter bzw. Zusammenhänge richtig berücksichtigt und bzw. ob sein Entwurf sich mit dem bisherigen messen kann, oder ob krasse Fehler vorliegen. Gute Erfahrungen wurden beim Entwurf des Segelflugzeuges B4 mit dieser Methode gemacht.

Abstract

Possibilities are shown to use statistical methods for design of sailplanes. The methods given here enables designers to control the correlation of different parameters by statistically derived formulae, giving correlations between three parameters. These can be chosen by the designer and the necessary formulae can be compiled by them. The degree of probability (significance) of these formulae can be controlled. This enables designers to compare their designs against actual sailplanes. They are able to state whether certain correlations were taken care of correctly or whether errors occurred. Good experience with this method was gained during the design of all metal Sailplane B4.

Literaturangaben/Bibliography

1. Walter Stender, Entwurfsgrundlagen für Segelflugzeuge, Weltluftfahrt, Bd. 4 und Bd. 5
2. OSTIV, The World's Sailplanes I
3. OSTIV, The World's Sailplane II
4. DVL-PfL, Arbeitsblätter Prüfdienst
5. Linder, Statistische Methoden, Birkhäuser Verlag Basel
6. Zimmermann, Kompendium der Variationsstatistik, VEB Verlag der Wissenschaften Berlin
7. Fisher, Statistical Methods for Research Workers, Oliver and Boyd-Edinburgh

n_2	$P = 0,05$	$P = 0,01$	$P = 0,001$
10	4,103	7,560	14,906
15	3,683	6,359	11,338
18	3,555	6,013	10,389
20	3,493	5,849	9,952
25	3,385	5,568	9,222
30	3,316	5,390	8,774

16. Werte der F-Verteilung für zwei unabhängige Variable und verschiedene Wertzahlen bei verschiedenen Wahrscheinlichkeiten
Values of F-distribution for two independent variables and different numbers of values n_2 for three levels of probabilities.

Fig. 14 angegeben wird.

Der Quotient F der beiden Durchschnittsquadrate muss deutlich grösser sein, als der ermittelte theoretische Wert der F -Verteilung der aus Tabellen ablesbar ist. Diese Tabellen sind für bestimmte Wahrscheinlichkeiten P des Zutreffens der gewonnenen Aussage aufgestellt (5).

statisch ermittelten Werte liegt, ist konstruktiv sicherlich nicht ausreichend sorgfältig durchgearbeitet. Die errechenbaren Werte geben anzustrebende Richtwerte an, die, da sie in Verbindung mit anderen Entwurfsparametern stehen, hohen Aussagewert haben. Interessant ist in diesem Zusammenhang zu erwähnen, dass der Ein-

Werte F für $n_1 = 2$
und
Wahrscheinlichkeiten P
Values of F for $n_1 = 2$
and
Probabilities P