Die Belastungen des Höhenleitwerks des Segelflugzeuges bei brutaler Ruderbetätigung

Von Dipl.-Ing. JUSTYN SANDAUER, Luftfahrtinstitut, Warschau

Vortrag am 8. OSTIV-Kongreß, Köln, (Deutschland), Juni 1960

Seit ungefähr 25 Jahren treten die Belastungen der Höhenleitwerke von Flugzeugen während brutaler Ruderbetätigung, ihr Zusammenhang mit den Flügelbelastungen und ihre Abhängigkeit von den dynamischen Flugwerkparametern als Gegenstand der Erwägungen und Untersuchungen in vielen Ländern auf. Gegenwärtig kann man diese Frage als völlig gelöst betrachten, und zweifellos stützen sich die Festigkeitsberechnungen von Leitwerken und Rümpfen einer wesentlichen Zahl der gegenwärtig konstruierten Flugzeuge auf eine genaue Analyse der Belastungen, welche am Höhenleitwerk während brutaler Ruderbetätigung auftreten.

Es scheint jedoch, daß in der Segelflugtechnik auf diesem Gebiet eine Primitivität herrscht, welche sich nicht befriedigend erklären läßt. Die einerseits begreifliche Tendenz der Vereinfachung der Berechnungsmethoden in der Segelflugzeugkonstruktion soll doch nicht zur Flucht vor der genauen physikalischen Analyse der Erscheinungen und ihres Verlaufes in Abhängigkeit von den einzelnen Parametern des Segelflugzeuges führen. Als Beispiel einer Rückständigkeit in der Segelflugtechnik auf dem Gebiet der Belastungen, die von brutaler Ruderbetätigung herrühren, kann man die in vielen Ländern gültigen Segelflugzeugbauvorschriften darstellen, in welchen die Annahmen über die Höhenruderbetätigung nicht mit den Flügelbelastungskoeffizienten während des Abfangens physikalisch verbunden sind. Die Vorschriften äußern sich auch nicht näher über die Berechnungsmethoden. Der durch die Sachverständigenkommission der OSTIV vor kurzem bearbeitete Entwurf der Bauvorschriften für Segelflugzeuge der Standardklasse ist im erwähnten Bereich auch keine rühmliche Ausnahme. Von den mir bekannten Segelflugzeugbauvorschriften bilden nur die der Deutschen Demokratischen Republik in dieser Hinsicht einen Fortschritt.

1. Bezeichnungen

α	=	Segelflugzeuganstellwinkel (Flügel)
α_H	=	Höhenleitwerkanstellwinkel
α_z	=	Einstellwinkel des Höhenleitwerks
ϑ	=	Neigungswinkel des Segelflugzeuges
Θ	=	Neigungswinkel der Flugbahn
δ	=	Ausschlagwinkel des Höhenruders
ε	=	Abwindwinkel
Q	=	Gewicht des Segelflugzeuges
S	=	Flügelfläche
b	=	Flügelspannweite
l_a	=	Mittlere aerodynamische Flügeltiefe
S_H	=	Höhenleitwerkfläche
L_H	=	Hebelarm des Höhenleitwerks um den Schwerpunkt
v	=	Fluggeschwindigkeit
ρ	=	Luftdichte
q	=	Staudruck
q_H	=	Staudruck am Ort des Höhenleitwerks
η_H	=	q/q_H
m	=	Masse des Segelflugzeuges
i_y	=	Segelflugzeugträgheitsradius in bezug auf die Haupt-Quer-Trägheitsachse
n	=	Lastvielfaches
C_z	=	Auftriebsbeiwert des Flügels
C_{zH}	=	Auftriebsbeiwert des Höhenleitwerks
C_{mFl}	=	Momentenbeiwert des Flügels
P_H	=	Normalkraft am Höhenleitwerk
C_m	=	Momentenbeiwert des Segelflugzeuges um den Schwerpunkt
ω_n	=	Frequenz der Schwingung um die Querachse (schnelle Anstellwinkelschwingung)

2. Die physikalische Seite des Vorganges

Wenn sich das Segelflugzeug im stationären Gleitflug mit einer Geschwindigkeit v, welcher ein Höhenruderausschlagwinkel δ_0 entspricht, befindet, verursacht jeder zusätzliche Ruderausschlag um einen Winkel von $\Delta\delta$ einen Übergang des Segelflugzeuges in einen unstationären Flug, welcher «Abfangen» genannt wird. Die genaue mathematische Analyse des «Abfangens» führt zu sehr verwickelten Abhängigkeiten, welche sich jedoch in hohem Grade vereinfachen, wenn man sich auf die Betrachtung des ersten, nicht länger als 1–2 Sekunden dauernden Teiles der Erscheinung beschränkt. Während dieser Zeitdauer treten die höchsten Belastungen sowohl der Flügel wie auch des Leitwerkes auf. Die grundsätzlichen Voraussetzungen, welche die mathematische Analyse des Abfangens vereinfachen, sind:

1. Die Fluggeschwindigkeit des Segelflugzeuges bleibt unverändert.

2. Die Vertikalkomponente des Segelflugzeuggewichtes zur Fluglinie bleibt unverändert.

3. Der Zuwachs der aerodynamischen Kraft am Höhenleitwerk ist sehr klein im Vergleich zur Kraft am Flügel und stört nur das Momentgleichgewicht.

4. Die Strömung am Segelflugzeug hat einen stationären Charakter, das heißt: die Koeffizienten der aerodynamischen Kräfte hängen nur vom jeweiligen Anstellwinkel ab.

5. Das Segelflugzeug ist ein steifer Körper.

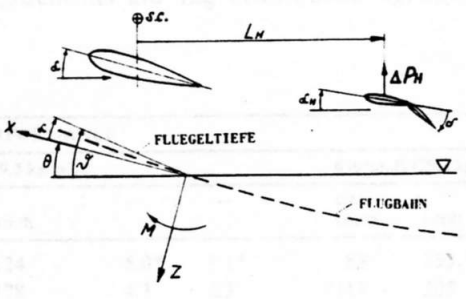


Fig. 1 Angewandte Bezeichnungen und positive Richtungen

Wenn man die Bezeichnungen, wie in Fig. 1 dargestellt, annimmt, sind die Gleichgewichtsgleichungen der zur Flugrichtung vertikalen Kräfte und der Momente für den stationären Gleitflug die folgenden:

$$Q\cos\Theta_0 - \frac{dC_z}{da}\,a_0\,q\,S = 0 \tag{1}$$

$$C_mFl\cdot qSl_a - \frac{dC_{zH}}{da_H}\left[a_0\left(1-\frac{d\varepsilon}{da}\right)+a_z+\right.$$
$$\left.+\frac{da_H}{d\delta}\,\delta_0\right]q\eta_H S_H L_H = 0 \tag{2}$$

Nach dem Höhenruderausschlag um den Winkel $\Delta\delta$ nehmen die vereinfachten Gleichgewichtsgleichungen für Kräfte und Momente die folgende Gestalt an:

$$Q\cos\Theta_0 - \frac{dC_z}{da}\left(a_0+\Delta a\right)qS + m\Theta' V = 0 \tag{3}$$

$$\left(CmFl+\frac{dCmFl}{da}\,\Delta a\right)qSl_a - \frac{dC_{zH}}{da_H}\left[\left(a_0+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\Delta a\right)\left(1-\frac{d\varepsilon}{da}\right)+a'\,\frac{L_H}{V}\,\frac{d\varepsilon}{da}+\vartheta'\,\frac{L_H}{V}\,\frac{K}{\sqrt{\eta_H}}+\right.$$
$$\left.+a_z+\frac{da_H}{d\delta}\left(\delta_0+\Delta\delta\right)\right]q\eta_H S_H L_H - mi^2{}_y\vartheta'' = 0 \tag{4}$$

In Gleichung (4) blieb die durch den Ruderausschlag verursachte Verschiebung des Druckpunktes am Höhenleitwerk (Einfluß der Krümmung der Profilmittellinie) unberücksichtigt. Dieser Teil der Gleichung, welcher a' enthält, berücksichtigt die Verzögerung, mit welcher die durch den Flügel abgeneigte Strömung an das Leitwerk herankommt. Der ϑ' enthaltende Teil der Gleichung berücksichtigt die Dämpfung der Drehbewegung, wobei man den Wert des Koeffizienten K, welcher das Verhältnis der Dämpfung des ganzen Segelflugzeuges zur Dämpfung des Höhenleitwerks bezeichnet, annähernd als 1,1 annehmen kann.

Wenn man die Gleichungen (1) und (2) von (3) und (4) abzieht, bekommt man als Resultat die Gleichung der Bewegung

$$m\Theta' V - \frac{dC_z}{da}\,\Delta aqS = 0 \tag{5}$$

$$\frac{dC_mFl}{da}\,\Delta aqSl_a - \frac{dC_{zH}}{da_H}\left[\Delta a\left(1-\frac{d\varepsilon}{da}\right)+a'\,\frac{L_H}{v}\,\frac{d\varepsilon}{da}+\right.$$
$$\left.+\vartheta'\,\frac{L_H}{v}\,\frac{1{,}1}{\sqrt{\eta_H}}+\frac{da_H}{d\delta}\,\Delta\delta\right]q\eta_H S_H L_H - mi^2{}_y\cdot\vartheta'' = 0 \tag{6}$$

Will man in Gleichung (6) die veränderliche Größe ϑ durch die Veränderliche a ersetzen, kann man sich der umgestalteten Gleichung (5) bedienen:

$$\Theta' = \frac{dC_z}{da}\,\Delta aq\cdot\frac{S}{m\cdot v}$$
$$\Theta'' = \frac{dC_z}{da}\,a'q\,\frac{S}{mv} \tag{7}$$

welche, in die aus Fig. 1 ersichtlichen Abhängigkeiten

$$\vartheta = (a_0+\Delta a)+(\Theta_0+\Delta\Theta)$$
$$\vartheta' = a'+\Theta'$$
$$\vartheta'' = a''+\Theta'' \tag{8}$$

eingesetzt, folgendes Resultat ergibt:

$$\vartheta' = a' + \frac{dC_z}{da}\,\Delta aq\,\frac{S}{mv}$$
$$\vartheta'' = a'' + \frac{dC_z}{da}\,a'q\,\frac{S}{mv}$$

Nach dem Einsetzen der Ausdrücke für ϑ' und ϑ'' in die Gleichung (6) bekommt man die grundsätzliche Differentialgleichung der Bewegung:

$$a'' + K_1 a' + K_2\,\Delta a = K_3\,\Delta\delta \tag{10}$$

wobei

$$K_1 = \frac{\rho v}{2m}\left[\frac{dC_{zH}}{da_H}\,\frac{S_H L^2{}_H}{i^2 y}\,\eta_H\left(\frac{1{,}1}{\sqrt{\eta_H}}+\frac{d\varepsilon}{da}\right)+\frac{dC_z}{da}\,S\right]$$

$$K_2 = -\frac{\rho v^2}{2m}\left\{\frac{dC_mFl}{da}\cdot\frac{Sla}{i^2 y} - \frac{dC_{zH}}{da_H}\,\eta_H\,\frac{S_H L_H}{i^2 y}\left[\left(1-\frac{d\varepsilon}{da}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+1{,}1\,\frac{dC_z}{da}\,\frac{\rho S L_H}{2m\sqrt{\eta_H}}\right]\right\}$$

$$K_3 = -\frac{\rho v^2}{2m}\,\frac{dC_{zH}}{d\delta}\,\eta_H\,\frac{S_H L_H}{i^2 y} \tag{11}$$

Man muß seine Aufmerksamkeit noch darauf richten, daß

$$K_2 = \omega^2{}_n$$

ist, wo mit ω_n die Frequenz der ungedämpften Schwingung des Segelflugzeuges um seine Querachse bezeichnet wurde.

Die Lösung der Gleichung (10) ergibt für eine vorausgesetzte Funktion $\Delta\delta\,(t)$ den Verlauf der Funktion $\Delta a\,(t)$, aus welcher man das Lastvielfache

$$\Delta_n = \frac{dC_z}{da}\,\frac{qS}{Q}\,\Delta a \tag{12}$$

und die Kraft am Leitwerk

$$\Delta P_H = \frac{dC_{zH}}{da_H}\,q\cdot\eta_H S_H\Delta a_H = \frac{dC_{zH}}{da_H}\,q\eta_H S_H\left[\left(1-\frac{d\varepsilon}{da}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{dC_z}{da}\,\frac{\rho S L_H}{2m\sqrt{\eta_H}}\right)+a'\,\frac{L_H}{v}\left(\frac{d\varepsilon}{da}+\frac{1}{\sqrt{\eta_H}}\right)+\frac{da_H}{d\delta}\,\Delta\delta\right] \tag{13}$$

errechnen kann.

Die am Höhenleitwerk auftretende Kraft kann man folgendermaßen einteilen: den ersten, durch die Veränderung des Segelflugzeuganstellwinkels verursachten Teil – das sind die zwei ersten in rechteckige Klammern gefaßten Bestandteile der Gleichung (13), und den zweiten, durch den Ruderausschlag verursachten Teil der Kraft – das ist der dritte in rechteckige Klammern gefaßte Bestandteil der Gleichung. Weil der zweite Teil, welcher den Einfluß der Winkelgeschwindigkeit a' berücksichtigt, in manchen Fällen einen viel kleineren Wert als der erste Teil besitzt, kann man manchmal annähernd annehmen, daß die Kraft P_H aus den zum Anstellwinkel a und zum Ruderausschlagwinkel δ proportionalen Teilen besteht. Weil das Lastvielfache Δn und die Kraft ΔP_H am Höhenleitwerk vor allem vom Verlauf der Funktion $\Delta\delta(t)$ abhängen, wird es zweckmäßig sein, erst ihre Analyse durchzuführen.

3. Der Zeitverlauf des Höhenruderausschlages

Um einen beabsichtigten Wert des Lastvielfachen n zu erzielen, kann der Pilot den Steuervorgang, also den Verlauf der Funktion $\Delta\delta(t)$, verschieden durchführen. Im allgemeinen kann man zwei Steuervorgangstypen ausscheiden:

a) Der Pilot vergrößert stetig den Ruderausschlag bis zu einem Winkel, welchem das beabsichtigte Lastvielfache entspricht; dann hält er das Ruder in dieser Lage fest (Fig. 2b). Grundsätzlich kann die Geschwindigkeit des Ruderausschla-

ges beliebig sein; sie muß jedoch genügend groß sein, um die Fluggeschwindigkeitsänderung vernachlässigen zu können.

b) Der Pilot schlägt das Ruder um einen Winkel aus, der größer ist als der dem beabsichtigten Lastvielfachen entsprechende Ausschlagwinkel; darauf verringert er den Ruderausschlag bis nahe an die Anfangsgröße (Fig. 2c).

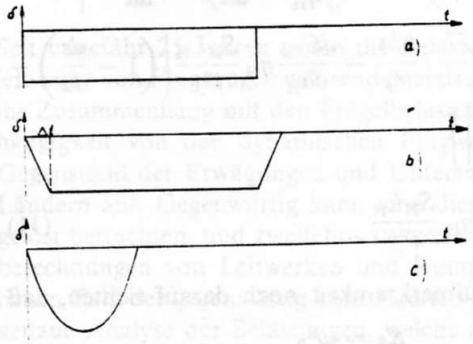


Fig. 2 Ruderausschlagvarianten

Es ist klar, daß die oben beschriebenen Steuervorgänge nur einen schematischen Charakter haben. Sie erlauben jedoch, einfache mathematische Abhängigkeiten zu formulieren.

Die Steuervorgänge der a)-Type, welche Richards (4) «unchecked manoeuvre» nennt, unterscheiden sich nach dem Verlauf des anwachsenden Teiles der $\Delta\delta(t)$-Kurve. Weil sowohl für die Flügel- wie auch Leitwerkbelastung die mittlere Höhenruderausschlaggeschwindigkeit von entscheidender Bedeutung ist, können wir uns auf die Untersuchung eines geradlinigen Verlaufes gemäß Fig. 2b beschränken.

Ein Grenzfall der oben betrachteten Steuervorgangstype ist die Sprungfunktion (Fig. 2a), nach welcher der Ruderausschlag während einer unendlich kleinen Zeitdauer erfolgt. Dieser Fall hat in der Regeltechnik, also auch in dem hier untersuchten Problem, eine grundsätzliche Bedeutung.

Die Steuervorgänge der b)-Type, die Richards «checked manoeuvre» nennt, können sich nach dem Verlauf sowohl des ansteigenden wie auch des abfallenden $\Delta\delta(t)$-Kurventeils unterscheiden. Eine große mathematische Vereinfachung wäre durch die Annahme eines sinusoidalen Verlaufes erreicht.

Vor der weiteren Diskussion beider Steuervorgangstypen, besonders vor der Feststellung, welche von ihnen den wirklichen Flugbedingungen am besten entspricht, werden wir uns den Flügel- und Höhenleitwerksbelastungsverlauf in Abhängigkeit vom Steuervorgang klarmachen. Deshalb muß man die Gleichung (10) lösen und mit Hilfe der erhaltenen Funktion $\Delta\alpha(t)$ aus (12) den Δn-Verlauf sowie aus (13) den Verlauf von ΔP_H bestimmen.

4. Der Verlauf des Lastvielfachen und der Kraft am Höhenleitwerk

a) Einheitssprungfunktion $\Delta\delta(t)$

Die Lösung der Gleichung (10) hängt vom Vorzeichen der Determinante

$$K_2 - \frac{K_1^2}{4} \text{ ab.} \qquad \text{Für } K_2 - \frac{K_1^2}{4} > 0$$

haben die Wurzeln der charakteristischen Gleichung folgende Werte:

$$\lambda_{1,2} = \beta \pm i\nu \qquad \beta = -\frac{K_1}{2} \qquad \nu = \sqrt{K_2 - \frac{K_1^2}{4}}$$

und der Verlauf des Anstellwinkels ist

$$\Delta\alpha = \frac{K_3}{K_2}\left[1 - \frac{\sqrt{K_2}}{\nu} l^{\beta t} \sin(\nu t + \varphi)\right] \tag{14}$$

$$\text{wo } \operatorname{tg}\varphi = -\frac{\nu}{\beta} \qquad \text{Für } K_2 - \frac{K_1^2}{4} < 0$$

nehmen die Wurzeln der charakteristischen Gleichung folgende Werte an:

$$\lambda_{1,2} = \beta \pm \tau \qquad \tau = \sqrt{\frac{K_1^2}{4} - K_2}$$

und der Verlauf des Anstellwinkels ist

$$\Delta\alpha = \frac{K_3}{K_2}\left[1 + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_1 l^{\lambda_2 t} - \lambda_2 l^{\lambda_1 t}\right)\right] \tag{15}$$

Ob die Bewegung periodisch oder aperiodisch sein wird, entscheidet das Vorzeichen der Determinante

$$K_2 - \frac{K_1^2}{4}.$$

Jedoch sind das Vorzeichen und der absolute Wert der Determinante für ein Segelflugzeug nicht konstant, denn sie hängen vom Anfangsstabilitätsmaß

$$H_m = \frac{dC_m Fl}{dC_z} - \frac{dC_{zH}}{da_H} \cdot \frac{da}{dC_z}\left(1 - \frac{d\varepsilon}{da} + \right.$$

$$\left. + \frac{dC_z}{da}\frac{\rho S L_H}{2m\,|\,\eta_H}\right)\eta_H \frac{S_H L_H}{S \cdot l_a} \tag{16}$$

ab. Dies geht unmittelbar aus der Tatsache hervor, daß man die den Beiwert K_2 bestimmende Formel (11) mit einer viel bündigeren Formel

$$K_2 \approx -H_m \frac{dC_z}{da}\frac{\rho v^2}{2}\frac{Sl_a}{m \cdot i_y^2}$$

ersetzen kann.

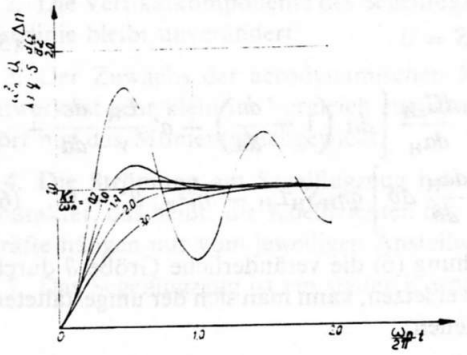


Fig. 3 Periodischer und aperiodischer Verlauf des Lastvielfachen für die Einheitssprungfunktion des Ruderausschlagwinkels $\Delta\delta$ (1)

Bei entsprechend kleinem Abfangsstabilitätsmaß, das heißt bei einer hinteren Schwerpunktlage, wird der Beiwert K_2 immer kleiner als

$$\frac{K_1^2}{4}$$

– dann haben wir es mit einer aperiodischen Bewegung zu tun. Wenn sich der Schwerpunkt des Segelflugzeuges nach vorne verschiebt, wächst der Beiwert K_2 an, die Determinante ändert ihr Vorzeichen, und die durch den Höhenruderausschlag hervorgerufene Bewegung nimmt die Gestalt einer Schwingung an. Falls eine periodische Bewegung stattfindet, weist der Verlauf des (zum Anstellwinkel proportionalen) Lastvielfachen gedämpfte Schwingungen um den stationären Wert auf (Fig. 3), wobei der Wert des ersten Maximums ihn

bedeutend überschreiten kann. Den Unterschied kann man aus der annähernden Abhängigkeit

$$\zeta_0 = \frac{\Delta n_{max}}{\Delta n_{stat}} \approx 1 + l^{\frac{\beta}{\nu}\pi} \tag{17}$$

oder aus einem Diagramm (Fig. 4a) bestimmen.

Im Falle einer aperiodischen Bewegung strebt das Lastvielfache asymptotisch seinem stationären Wert zu.

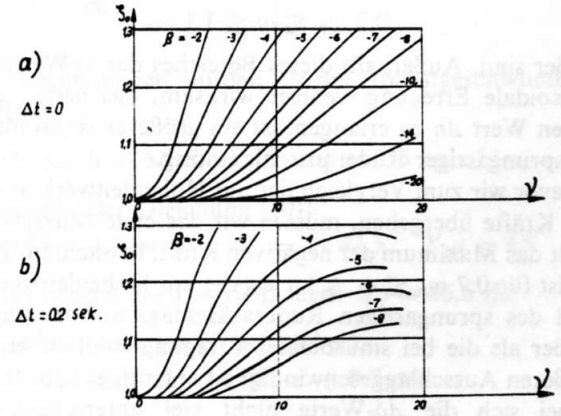


Fig. 4 Diagramme des Beiwertes ξ_0

Der Verlauf der Kraft am Höhenleitwerk entspricht annähernd der Summe der Diagramme von $\Delta\alpha(t)$ und $\Delta\delta(t)$, von welchen der erste im Maßstab

$$1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha} + \frac{dC_z}{d\alpha}\frac{\rho}{2}\frac{S}{m}\frac{L_H}{\sqrt{\eta_H}}$$

und der zweite im Maßstab

$$\frac{d\alpha_H}{d\delta} \quad \text{ausgeführt wurde.}$$

b) Einheitlicher Ausschlagwinkel mit Schaltzeit Δt

Ähnlich wie im früher untersuchten Fall hängt die Lösung der Gleichung (11) vom Vorzeichen der Determinante

$$K_2 - \frac{K_1^2}{4} \text{ ab. Für } K_2 - \frac{K_1^2}{4} > 0$$

erhalten wir eine periodische Bewegung, die durch folgende zwei Gleichungen bestimmt wird:

für $t \leqq \Delta t$

$$\Delta\alpha = \frac{K_3}{K_2}\left\{\frac{t}{\Delta t} - \frac{K_1}{K_2\Delta t}\left[1 - \frac{\sqrt{K_2}}{\nu} l^{\beta t} \sin\left(\nu t + \varphi\right)\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{l^{\beta t}}{\nu \cdot \Delta t}\sin \nu t\right\} \tag{18}$$

für $t > \Delta t$

$$\Delta\alpha = \frac{K_3}{K_2}\left\{1 + \frac{e^{\beta t}}{\nu \cdot \Delta t}\left[1 - \frac{\sqrt{K_2}}{\nu} e^{\beta t} \sin(\nu t + \varphi) - \right.\right.$$
$$\left. - \sin \nu t\right] - \frac{e^{\beta(t-\Delta t)}}{\nu \cdot \Delta t}\left[\frac{K_1}{\sqrt{K_2}}\sin\left[\nu(t - \Delta t) + \varphi\right] - \right.$$
$$\left.\left. - \sin \nu(t - \Delta t)\right]\right\} \tag{19}$$

Für $K_2 - \frac{K_1^2}{4} < 0$

erhalten wir eine durch folgende zwei Gleichungen bestimmte aperiodische Bewegung:

für $t \leqq \Delta t$

$$\Delta\alpha = \frac{K_3}{K_2}\left\{\frac{t}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t(\lambda_1 - \lambda_2)}\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(1 - e^{\lambda_2 t}) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(1 - e^{\lambda_1 t}\right)\right]\right\} \tag{20}$$

für $t > \Delta t$

$$\Delta\alpha = \frac{K_3}{K_2}\left\{1 + \frac{1}{\Delta t(\lambda_1 - \lambda_2)}\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_1(t-\Delta t)}) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_2(t-\Delta t)}\right)\right]\right\} \tag{21}$$

Für beide Vorzeichen der Determinante

$$K_2 - \frac{K_1^2}{4}$$

ist der Verlauf der Bewegung bei $t > \Delta t$ dem bei einem plötzlichen Ruderausschlag sehr ähnlich, und der Wert des stationären Anstellwinkels ist analog.

Bei periodischer Bewegung ist das Lastvielfachenmaximum kleiner als bei plötzlichem Ruderausschlag und sinkt mit der Verlängerung der Zeitdauer Δt. Die Formel für ξ_0 ist viel komplizierter als die Formel (17). Aus Fig. 4b läßt sich der Wert von ξ_0 für $\Delta t = 0{,}2$ sec ermitteln.

Wenn man die Diagramme 4a und 4b vergleicht, kann man feststellen, daß die Verminderung von ξ_0 mit dem Anwachsen von Δt um so schneller vorgeht, je höher ν ist, wobei sie praktisch nicht von β abhängig ist.

Weil der Verlauf von $\Delta\alpha(t)$ im ersten Zeitabschnitt für den plötzlichen Ruderausschlag sich von dem für linearen Ruderausschlagverlauf unterscheidet, weist auch der Verlauf von $\Delta P_H(t)$ große Unterschiede auf, und zwar um so mehr, als ja im Anfangsstadium auch der Verlauf von $\Delta\delta(t)$ unterschiedlich ist.

Während des zweiten Zeitabschnitts, also für $t > \Delta t$, ist der Verlauf von $\Delta P_H(t)$ in beiden Fällen sehr ähnlich.

c) Harmonische Funktion $\Delta\delta = \sin \omega t$

Die Lösung der Gleichung (10) nimmt die Gestalt

$$\Delta\alpha = \frac{K_3}{\sqrt{(K_2 - \omega^2) + K_1^2\omega^2}}\left[\sin(\omega t - \varphi_1) + \right.$$
$$\left. + Ae^{\beta t}\sin(\nu t + \varphi_2)\right] \text{ an, oder}$$

$$\Delta\alpha = \frac{K_3}{K_2} M\left[\sin(\omega t - \varphi_1) + Ae^{\beta t}\sin(\nu t + \varphi_2)\right] \tag{22}$$

wo

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{K_1\omega}{K_2 - \omega^2} = \frac{\frac{K_1}{\omega_n}\cdot\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \tag{23}$$

$$M = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + \left(\frac{K_1}{\omega_n}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

A und φ_2 = konstant, aus den Grenzbedingungen $\Delta\alpha(0) = 0$ und $\alpha'(0) = 0$ errechnete Werte.

Der zweite Bestandteil des in rechteckigen Klammern eingeschlossenen Teiles der Gleichung (22) charakterisiert den Übergangsverlauf (Einschwingvorgang) und verschwindet

mit einer von β abhängigen Geschwindigkeit. Nach kurzem Zeitverlauf bleibt nur der erste Bestandteil übrig, und der Anstellwinkel wie auch das Lastvielfache verlaufen sinusförmig mit einer Frequenz, die der Frequenz der erregenden Ruderausschläge gleich ist. Die Amplitude der Sinusoide ist eine Funktion der Frequenz, und ihr Maximum entspricht der Frequenz, bei welcher die dynamische Verstärkung M des Systems ein Maximum erzielt.

Wie aus Fig. 5a hervorgeht, entspricht für

$$\frac{K_1}{\omega_n} \leqq 0{,}6$$

die Resonanzfrequenz der Frequenz der schnellen α-Schwingung des Segelflugzeuges. Für

$$\frac{K_1}{\omega_n} > 0{,}6$$

verschiebt sich das Maximum der dynamischen Verstärkung näher an die kleineren Erregungsfrequenzen. Der Verlauf der Kraft am Leitwerk ist annähernd eine Summe zweier Sinusoiden, hängt also vom Winkel φ ihrer Phasenverschiebung ab. Mit Rücksicht auf die Tatsache, daß dem positiven Ausschlagwinkel $\Delta\delta$ ein negativer Segelflugzeuganstellwinkel $\Delta\alpha$ nachfolgt, wird die maximale Amplitude der Leitwerkkraft dem Winkel $\varphi = 180°$ entsprechen.

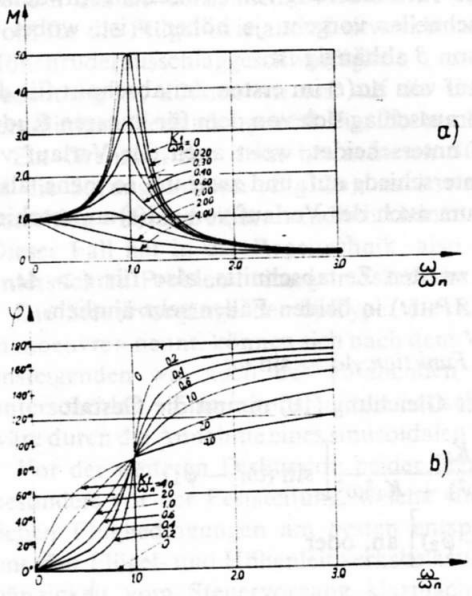


Fig. 5 Dynamische Verstärkung M und Phasenverschiebungswinkel Φ

Wie es Fig. 5b veranschaulicht, wächst φ mit dem Anwachsen von ω und erreicht seinen Maximalwert $-180°$, wenn $\omega = \infty$ ist. Diese Tatsache bestätigt die intuitive Vermutung, daß ein sinusoidaler Höhenruderausschlag eine um so größere Höhenleitwerkbelastung hervorruft, je größer der Wert von ω ist.

Wenn man die drei oben besprochenen Arten brutaler Ruderbetätigung vom Gesichtspunkt der Höhenruderbelastung aus vergleichen will, muß man für jede einzelne Art der Ruderbetätigung den Winkel $\Delta\delta_{max}$ bestimmen. Weil in allen drei Fällen das Nichtüberschreiten des Lastvielfachen begrenzend wirkt, muß man vor allem die Wirksamkeit der einzelnen Ruderbetätigungsweisen vom Gesichtspunkt der erlangten Δn-Werte aus vergleichen. Um die Frage zu vereinfachen, werden wir uns nur auf den sprungartigen und sinusförmigen Ruderausschlag beschränken, denn ein linearer Ruderausschlagablauf ruft am Höhenleitwerk immer eine kleinere Kraft hervor als ein sprungartiger. Wenn man auf Grund der Diagramme 3 und 5a die maximalen Werte des Lastvielfachen beim sprungartigen und sinusoidalen, mit derselben Amplitude ausgeführten Ruderausschlag vergleicht, kann man feststellen, daß für

$$\frac{K_1}{\omega_n} < 0{,}6$$

die Werte Δn_{max} bei sinusoidaler Erregung mit einer Frequenz

$$0{,}7\ \omega_n \leqq \omega \leqq 1{,}1\ \omega_n$$

größer sind. Außerhalb dieses Bereiches der ω-Werte ist die sinusoidale Erregung weniger wirksam, das heißt, um denselben Wert Δn zu erlangen, ist ein größerer sinusoidaler als ein sprungartiger Ruderausschlag nötig.

Bevor wir zum Vergleich der am Höhenleitwerk auftretenden Kräfte übergehen, müssen wir das erste Maximum, das heißt das Maximum der negativen Kraft, betrachten. Zweifellos ist für $0{,}7\ \omega_n \leqq \omega \leqq 1{,}1\ \omega_n$ die am Höhenleitwerk während des sprungartigen Ruderausschlags auftretende Kraft größer als die bei sinusoidaler Erregung, weil sie einer viel größeren Ausschlaggeschwindigkeit entspricht ($\Delta\delta/\Delta t = \infty$), wobei sich die $\Delta\delta$-Werte nicht viel unterscheiden. Für $\omega < 0{,}7\ \omega_n$ ist zwar die Amplitude des sinusoidalen Ruderausschlags nicht kleiner als beim sprungartigen Ruderausschlag, aber mit Rücksicht auf die verhältnismäßig kleine $\Delta\delta$-Anwachsgeschwindigkeit ist auch die Belastung des Leitwerks kleiner als beim sprungartigen Ruderausschlag. Der sinusoidale Ruderausschlag ist erst für wesentlich $1{,}1\ \omega_n$ überschreitende ω-Werte maßgebend. Wenn wir zum zweiten, nämlich zum positiven Leitwerkskraftmaximum übergehen, müssen wir feststellen, daß im Falle eines sprungartigen Ruderausschlags das Kraftmaximum im Moment, wenn das Ruder in seine Ausgangslage zurückkehrt, auftritt. Der Fall des sinusoidalen Ruderausschlags wird dann maßgebend sein, wenn in dem Augenblick, in welchem der Anstellwinkel des Segelflugzeuges seinen maximalen Wert erlangt, das Ruder um einen positiven Winkel aus seiner relativen Nullpunktlage ausgeschlagen sein wird. Der Ruderausschlagwinkel wird dann positiv sein, wenn die Phasenvorschiebung φ größer als $90°$ sein wird; wie aus Fig. 5b hervorgeht, ist diese Bedingung für $\omega \geqq \omega_n$ erfüllt.

In den das zweite Maximum der Höhenleitwerkskraft betreffenden Erwägungen wurde der Einfluß des Übergangsverlaufs (des Einschwingvorgangs) beim sinusoidalen Ruderausschlag vernachlässigt, weil er in dem Moment, in welchem der maximale Anstellwinkel erreicht wird, gewöhnlich schon sehr klein ist.

5. Berechnungsbeispiel

Um Zahlen, welche die früher beschriebenen drei brutalen Ruderbetätigungsvorgänge charakterisieren, zu erlangen, wurden die Verläufe $\Delta n(t)$ und $\Delta P_H(t)$ für das einsitzige Hochleistungssegelflugzeug «Zefir» berechnet. Die zwei in Frage kommenden extremen Schwerpunktlagen sind: die vordere Schwerpunktlage $(X_{SP})_V = 26.2\%$ und die hintere Schwerpunktlage $(X_{SP})_H = 38.4\%$.

Technische Daten:

$Q = 375$ kg $\quad S = 14$ m^2 $\quad la = 0.87$ m $\quad i^2y = 1.92$ m^2

$L_H = 4.1$ m $\quad S_H = 1.5$ m^2 $\quad \frac{dC_z}{da} = 5.35$ $\quad \frac{d\varepsilon}{da} = 0.14$

$$\frac{dC_{zH}}{da_H} = 3{,}5 \qquad \frac{dC_{zH}}{d\delta} = 2{,}44 \qquad \Delta n_{zul} = 4{,}5$$

vordere Schwerpunktlage	hintere Schwerpunktlage
$\frac{dcm}{dcz} = -0{,}23$	$-0{,}12$
$\frac{dCmFl}{da} = 0{,}3$	$0{,}8$

Die Berechnungen wurden für die Höchstgeschwindigkeit ausgeführt.

$V = 220$ km/h $= 61$ m/sec $\qquad q = 233$ kg/m^2

Die Beiwerte der Gleichung (10):

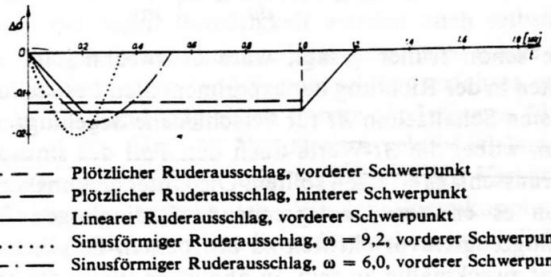
$K_1 = 9{,}15 \quad K_{2V} = 85 \quad K_3 = -47{,}5 \quad K_{2H} = 65$

Das Anwachsen des Lastvielfachen: $\Delta n = 46{,}6\, \Delta a$

Der Kraftzuwachs am Höhenleitwerk:

$\Delta P_H = 1224\,(1{,}36\, \Delta a + 0{,}077\, a' + 0{,}7\, \Delta\delta)$

Zum Vergleich wurden in Fig. 6 Diagramme von $\Delta n(t)$ und $\Delta P_H(t)$ für verschiedene Ruderausschlagverläufe dargestellt.



— — — — — Plötzlicher Ruderausschlag, vorderer Schwerpunkt
— — — — Plötzlicher Ruderausschlag, hinterer Schwerpunkt
——— Linearer Ruderausschlag, vorderer Schwerpunkt
..... Sinusförmiger Ruderausschlag, $\omega = 9{,}2$, vorderer Schwerpunkt
— · — · — Sinusförmiger Ruderausschlag, $\omega = 6{,}0$, vorderer Schwerpunkt

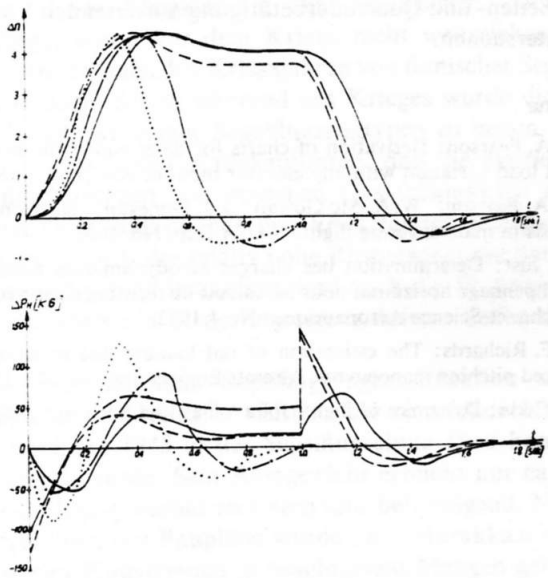


Fig. 6

Diagramme der während brutaler Ruderbetätigung am Segelflugzeug «ZEFIR» auftretenden Δn- und ΔP_H-Werte, V = 220 km/h

6. Flugmessungen

Um den wirklichen Verlauf der Höhenruderausschläge während brutaler Ruderbetätigung festzustellen, wurden auf einem zweisitzigen Leistungssegelflugzeug «Bocian» Flugmessungen durchgeführt. Im Segelflugzeug wurde an der Höhenruderachse ein Ausschlagschreiber befestigt, und in der Nähe des Schwerpunktes des Segelflugzeuges wurde ein Beschleunigungsschreiber und ein giroskopischer Neigungs-Winkelgeschwindigkeitsschreiber angebracht.

An der Gerätetafel wurde eine elektrische, die geschriebenen Diagramme synchronisierende Uhr und ein den Piloten über das Lastvielfache informierender Beschleunigungsmesser angebracht.

Das Untersuchungsprogramm umfaßte die Ausführung normaler Beschleunigungen im geraden Fluge mittels brutaler Ruderbetätigung im Geschwindigkeitsbereich über 2 v_{min}, das heißt über 120 km/h, wobei das zulässige Lastvielfache nicht überschritten werden durfte. Der Pilot führte seine Aufgabe in der Weise aus, daß er den Knüppel möglichst schnell und stufenlos mit einer Hand bewegte. Die typischen Ruderausschlagdiagramme $\Delta\delta(t)$ und die ihnen entsprechenden Verläufe von $\Delta n(t)$ sind in Fig. 7 dargestellt.

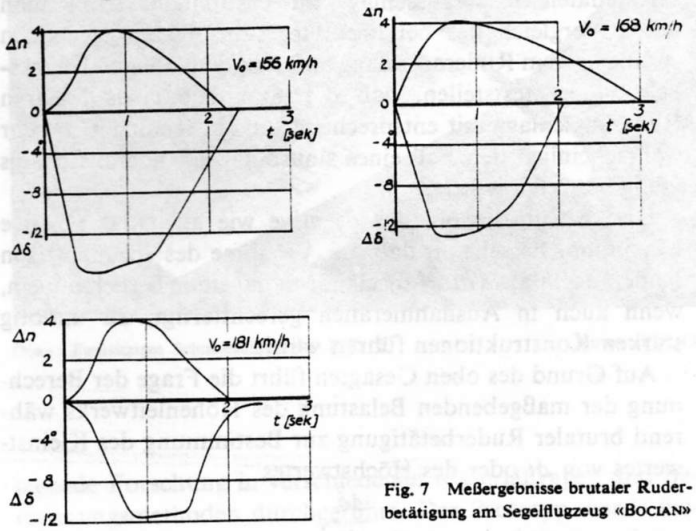


Fig. 7 Meßergebnisse brutaler Ruderbetätigung am Segelflugzeug «BOCIAN»

Beachtenswert ist, daß bei allen Messungen der durch den Piloten verursachte Ruderausschlag einen dem linearen ähnlichen Verlauf aufweist. In der Endphase ist die Ausschlaggeschwindigkeit nicht mehr konstant und fällt schnell ab, was durch die Aufmerksamkeit des Piloten, der das zulässige Lastvielfache nicht überschreiten durfte, verursacht wurde. Der reelle Ruderausschlag kann also entweder linear oder sinusoidal angenähert werden.

Wie aus den Meßergebnissen hervorgeht, fällt die Ruderausschlaggeschwindigkeit

$$\frac{\Delta\delta}{\Delta t}$$

mit zunehmender Fluggeschwindigkeit. Weil sich aber auch der Ruderausschlagwinkel verringert, ändert sich die Zeit Δt in den einzelnen Messungen nur sehr wenig. Für das Segelflugzeug «Bocian» kann man annehmen, das der kleinste Wert von Δt ungefähr 0,3 sec beträgt.

Man muß betonen, daß die durchgeführten Messungen einen einleitenden Charakter haben und vorläufig nur ein Segelflugzeug betreffen, das einen verhältnismäßig hohen Knüppelkraftgradienten bezüglich der Beschleunigung besitzt. Außerdem wurde nur die *a*-Variante der brutalen Ruderbetätigung – «unchecked manoeuvre» (Fig. 2b) – untersucht.

Im nächsten Programm wird am Segelflugzeug «Bocian» die *b*-Variante – «checked manoeuvre» (Fig. 2c) – untersucht. Später sollen ähnliche Untersuchungen an einigen andern Segelflugzeugen durchgeführt werden.

7. Folgerungen

Die Berechnungen der Belastungen des Höhenleitwerks eines Segelflugzeuges während brutaler Ruderbetätigung im Bereich des zulässigen Lastvielfachen hängt vom angenommenen Zeitverlauf des Höhenruderausschlags ab, wobei die mittlere Ruderausschlaggeschwindigkeit die Hauptrolle spielt. Weil diese Geschwindigkeit nicht unendlich groß sein kann, ist die wirkliche Leitwerkbelastung immer kleiner als jene, die dem sprungartigen Ruderausschlag ($\Delta t = 0$) entspricht.

Verschiedene Ruderausschlagverläufe während brutaler Ruderbetätigung kann man für Berechnungszwecke an einen linearen oder sinusoidalen Verlauf approximieren.

Diese Behauptung wurde durch Meßergebnisse bei Flugversuchen bestätigt. Obwohl die bisherigen knappen Messungen es nicht gestatten, die kürzeste Schaltzeit des linearen Ruderausschlags wie auch die größte Geschwindigkeit ω des sinusoidalen Ruderausschlags zu bestimmen, kann man durch Vergleich der bei linearem, sinusoidalem wie auch sprungartigem Ruderausschlag auftretenden Höhenleitwerksbelastungen feststellen, daß die Annahme eines linearen Ruderausschlags mit entsprechend kurzer Schaltzeit Δt sehr wahrscheinlich den Fall eines sinusoidalen Ruderausschlags völlig vertreten würde.

Dies betrifft sowohl das negative wie auch das positive Maximum. Es scheint, daß die Annahme des sprungartigen Ruderausschlags ($\Delta t = 0$) als Grundlage der Berechnungen, wenn auch in Ausnahmefällen gerechtfertigt, zu unnötig starken Konstruktionen führen würde.

Auf Grund des oben Gesagten führt die Frage der Berechnung der maßgebenden Belastung des Höhenleitwerks während brutaler Ruderbetätigung zur Bestimmung des Kleinstwertes von Δt oder des Höchstwertes

$$\frac{\Delta\delta}{\Delta t}.$$

Man soll dabei seine Aufmerksamkeit darauf richten, daß für verschiedene Segelflugzeugtypen diese Werte verschieden sein können, was eventuell in den Bauvorschriften für Segelflugzeuge seinen Niederschlag finden sollte. Trotzdem für die Bestimmung der größten Ruderausschlaggeschwindigkeit weitere Flugmessungen nötig sein werden, kann man vermuten, daß die Schaltzeit Δt die Dauer von $0{,}1 \div 0{,}2$ sec haben wird. Die Annahme eines konstanten Δt-Wertes anstatt

$$\frac{\Delta\delta}{\Delta t}$$

ist dadurch begründet, daß große $\Delta\delta$-Werte kleinen Fluggeschwindigkeiten entsprechen – dann ist die Ruderausschlaggeschwindigkeit groß, während bei großen Fluggeschwindigkeiten das Verhältnis

$$\frac{\Delta\delta}{\Delta t}$$

entsprechend kleiner ist. In beiden Fällen sind die

$$\frac{\Delta\delta}{\Delta t}\text{-Werte}$$

verschieden, jedoch liegen die Schaltzeiten Δt einander nahe. Diese Erwägungen betreffen auch die schnelle Rückkehr des Ruders in die Ausgangslage, wobei man zwecks Vereinfachung die Rückkehrzeit gleich der Schaltzeit annehmen kann.

Wenn man zur Berechnung der Belastungen des Höhenleitwerks des Segelflugzeuges während brutaler Ruderbetätigung das Ruderausschlagschema nach Fig. 2b annimmt, die kürzeste Schaltzeit Δt voraussetzt, und aus der Bedingung den zulässigen, nicht zu überschreitenden n-Wert berechnet, bekommt man ein positives und ein negatives Maximum der aerodynamischen Kraft. Der nächste Schritt führt zur Berechnung der Trägheitskräfte, da gleichzeitig mit dem aerodynamischen Kraftmaximum lineare Beschleunigungen $n \cdot g$ und Winkelbeschleunigungen ϑ'' auftreten. Die Bestimmung der linearen Beschleunigungen wurde in den vorigen Teilen ausführlich besprochen und fordert keine weitere Erläuterung. Zur Berechnung der Winkelbeschleunigungen werden wir die Beziehung (9) benützen:

$$\vartheta'' = a'' + \frac{dC_z}{da}\, a' \cdot q\, \frac{S}{mv}$$

Wie schon früher gesagt, wäre es zweckmäßig, weitere Arbeiten in der Richtung der experimentellen Feststellung der kürzesten Schaltzeiten Δt für verschiedene Segelflugzeuge zu führen, wobei die Δt-Werte auch den Fall des sinusoidalen Ruderausschlags erfassen sollten. Die Untersuchungsresultate werden es erlauben, entsprechende Bedingungen für die Segelflugzeugbauvorschriften zu bearbeiten. Es scheint auch äußerst zweckmäßig zu sein, in ähnlicher Weise die bei brutaler Seiten- und Querruderbetätigung auftretenden Vorgänge zu untersuchen.

Literatur

[1] H.A. Pearson: Derivation of charts for determining the horizontal tail load variation with any elevator motion. NACA Rep. No. 759.

[2] H.A. Pearson, W.A. Mc Gowan, J.J. Donegan: Horizontal tail loads in manoeuvering flight. NACA Rep. No. 1007

[3] W. Just: Détermination des charges aérodynamiques agissant sur l'empennage horizontal pour les calculs de résistance des matériaux. Techn. et Science Aéronautiques No 4/1952.

[4] P.F. Richards: The estimation of tail loading due to elevator induced pitching manoeuvres. Aircraft Engineering No. 371, 372, 373.

[5] B. Etkin: Dynamics of flight. John Wiley and Sons, Inc., 1959.