Étude de conditions didactiques favorables à la décontextualisation des connaissances mathématiques

Virginie Houle
Université du Québec à Montréal

Résumé

Les connaissances mathématiques des élèves ayant souvent un caractère local, il semble pertinent de s'interroger sur les caractéristiques vers lesquelles un dispositif d'enseignement devrait tendre pour favoriser la décontextualisation des connaissances. Nous avons choisi d'étudier cette question sous l'éclairage de la *théorie des situations didactiques* (Brousseau, 1998). Ainsi, des conditions didactiques visant à faciliter la liaison entre la situation adidactique et l'institutionnalisation ont été dégagées dans les écrits scientifiques et mises à l'épreuve auprès d'élèves en difficulté. Nos résultats nous conduisent, d'une part, à préciser l'intérêt et les limites des différentes conditions retenues et, d'autre part, à formuler quelques propositions didactiques pour favoriser le passage d'une connaissance locale à un savoir décontextualisé.

Mots-clés : décontextualisation, institutionnalisation, théorie des situations didactiques, enseignement des mathématiques, fraction

www.cje-rce.ca

Abstract

Students' mathematical c-knowledge usually has a local nature, thus, it seems relevant to question the characteristics to which an education system should aspire to favour the decontextualization of c-knowledge. This question was studied in the light of the *Theory of Didactical Situations* (Brousseau, 1998). Thus, the didactic conditions aiming at facilitating the relationship between the adidactical situations and the institutionalization were identified in the analysis of scientific writings and tested on students with learning difficulties. The results would lead us, on the one hand, to determine the interest and the limits of the different underlying conditions and, on the other hand, to make a few didactical statements that would favour the transition from a local c-knowledge to a decontextualized s-knowledge.

Keywords: well-being in teaching, character strengths, sense of teaching profession, professional identity

Introduction

Les théories constructivistes de l'apprentissage ont conduit à l'émergence de théories constructivistes de l'enseignement, notamment dans le domaine des mathématiques. Dans cette perspective, l'enseignant n'a pas comme mandat de transmettre les savoirs mathématiques aux élèves, mais plutôt de mettre en place des situations permettant aux élèves de (re)construire ces savoirs. Guy Brousseau, fondateur de la *théorie des situations didactiques* (TSD), a d'abord considéré, en s'appuyant sur les études de Piaget, que les élèves pouvaient apprendre de façon autonome et ainsi accéder aux savoirs[1]. Cependant, la position qu'il adopte se différencie de celle du psychologue. Alors que Piaget s'est essentiellement intéressé au sujet, en étudiant notamment l'épistémologie génétique[2], Brousseau s'est plutôt intéressé aux caractéristiques que devrait posséder le milieu avec lequel l'élève interagit pour lui permettre d'acquérir des savoirs donnés. Bien qu'il suggère d'abord une didactique strictement constructiviste, les recherches qu'il a menées le conduisent par la suite à soulever la nécessité d'une phase d'institutionnalisation pour donner aux connaissances le statut culturel indispensable de savoir.

La TSD, qui a été éprouvée par de nombreuses expérimentations, est une théorie incontournable en didactique des mathématiques. Cependant, des recherches (Bloch et Salin, 2004 ; Perrin-Glorian, 1993) qui l'ont mise à l'épreuve dans le cadre de l'adaptation scolaire relèvent la difficulté des élèves à se détacher de la situation qui a servi à introduire une notion. Cette difficulté a d'ailleurs été soulevée par Brousseau lui-même en 1988 : « Si la phase de personnalisation a bien marché, quand l'élève a répondu aux situations proposées, il ne sait pas qu'il a "produit" une connaissance qu'il va pouvoir utiliser dans d'autres occasions » (p. 14). Ainsi, les connaissances construites en situation adidactique ont souvent un caractère local. Bien que ce problème soit soulevé dans la littérature, peu de recherches ont étudié les adaptations qui pourraient être apportées à la

1 Selon Conne (1992), le savoir est une connaissance reconnue utile. Autrement dit, lorsqu'un élève reconnaît l'utilité d'une connaissance, il est en mesure d'identifier les problèmes pour lesquels cette connaissance est pertinente et il exerce ainsi un contrôle sur la situation.

2 Selon Piaget (1970), « Le propre de l'épistémologie génétique est […] de chercher à dégager les racines des diverses variétés de connaissance dès leurs formes les plus élémentaires et de suivre leur développement aux niveaux ultérieurs jusqu'à la pensée scientifique inclusivement. » (p. 6).

TSD pour favoriser la liaison entre les connaissances construites en situation et le savoir institutionnalisé.

Dans cet article, nous présentons d'abord les deux processus d'enseignement définis dans la TSD, soit la dévolution et l'institutionnalisation, et relevons la difficulté à les concilier. La recherche[3] que nous avons menée vise à favoriser la liaison entre ces deux processus. Nous avons donc dégagé, dans les écrits scientifiques qui ont examiné la TSD, des conditions didactiques qui apparaissent favorables à la décontextualisation des connaissances mathématiques. Ces conditions ayant été mises à l'épreuve, nous discutons de la pertinence et des limites de chacune d'entre elles, en illustrant nos propos à partir d'exemples tirés de notre expérimentation.

Les deux processus d'enseignement de la théorie des situations didactiques (TSD)

Dans la TSD, deux processus d'enseignement sont définis : la dévolution d'une situation adidactique (contextualisation) et l'institutionnalisation des connaissances (décontextualisation). Une situation adidactique est une forme de situation didactique, c'est-à-dire qu'elle est organisée par l'enseignant avec une intention didactique, mais celle-ci n'est pas explicite au regard de l'élève. Tout comme dans le jeu, dans une situation adidactique, des règles sont définies permettant aux élèves d'identifier ce qu'est un succès et ce qu'est un échec. Le choix des situations proposées par l'enseignant est déterminant. D'abord, elles doivent être à la portée des élèves, c'est-à-dire que leurs connaissances doivent leur permettre d'agir, de parler et de réfléchir, mais elles doivent également se révéler inefficaces pour trouver immédiatement la solution au problème. Ainsi, pour réussir la tâche, les élèves sont amenés à faire des accommodations, à modifier leur système de connaissances. Les élèves agissent sur le milieu qui les informe, en retour, de la réussite ou de l'échec de leur action. Le va-et-vient entre les actions des élèves et les rétroactions du milieu amène ces derniers à anticiper la réponse du milieu et à modifier leur stratégie, favorisant ainsi l'adaptation de leurs connaissances. Le rôle de l'enseignant consiste donc, dans un premier temps, à dévoluer la

3 Le contenu de cet article portant sur quelques-uns des résultats issus de ma thèse, je tiens à remercier très chaleureusement ma directrice de thèse, madame Jacinthe Giroux, pour sa précieuse contribution.

situation adidactique à l'élève, autrement dit, à faire accepter à l'élève la responsabilité de trouver une solution au problème. Selon Brousseau (1998), bien que l'élève sache que la situation a été choisie pour lui faire acquérir une nouvelle connaissance, l'enseignant devrait s'abstenir d'intervenir à propos du savoir en jeu pour que la connaissance produite soit entièrement justifiée par la logique interne de la situation. Ainsi, tout ce que l'enseignant entreprend pour faire produire à l'élève les comportements attendus a pour effet contraire de le priver des conditions nécessaires à la compréhension du savoir visé. La dévolution de la situation est donc réussie lorsque l'apprentissage se fait par adaptation au milieu, sans que l'élève cherche à répondre à des indices extérieurs à la situation.

La situation adidactique génère des connaissances locales, c'est-à-dire des connaissances qui sont adéquates pour résoudre le problème présenté, mais qui peuvent se révéler insuffisantes ou même fausses dans d'autres circonstances. Pour que les connaissances se transforment en savoirs, il doit y avoir une dépersonnalisation et une décontextualisation de façon à dégager, dans la solution apportée au problème, ce qui a un caractère universel et qui pourra être utilisé pour résoudre d'autres problèmes. Ainsi, l'enseignant a non seulement la responsabilité de dévoluer la situation adidactique aux élèves, mais aussi celle d'institutionnaliser le savoir. La TSD résulte donc d'un double processus d'adaptation et d'acculturation (Bessot, 2011).

Des études relèvent cependant la difficulté chez certains élèves à passer d'une connaissance locale à un savoir. Perrin-Glorian (1993), notamment, a mis à l'épreuve la TSD dans des classes issues d'un milieu socio-culturel défavorisé composées d'élèves ayant une ou deux années de retard scolaire. La chercheuse a expérimenté dans ces classes des ingénieries didactiques qui avaient fait leurs preuves dans des classes ordinaires. Elle observe, chez les élèves en difficulté, « un divorce net entre les situations d'action[4] visant à donner du sens aux notions enseignées et l'institutionnalisation qui est faite ensuite par le maître » (p. 65). Selon son étude, les différences entre les élèves « ordinaires » et les élèves « faibles » ne seraient pas tant au niveau des conduites adoptées lors de la situation adidac-

4 Brousseau (1998) identifie trois types de situations adidactiques qui font chacun fonctionner le savoir sous une forme différente : 1) la situation d'action vise à ce que les élèves se questionnent et recherchent une solution au problème proposé en exprimant leur choix directement par leur action sur le milieu ; 2) la situation de formulation contraint les élèves à expliciter les outils implicites engagés dans la situation d'action ; 3) la situation de validation conduit les élèves à mettre en œuvre des mécanismes de preuve pour convaincre les autres élèves de la pertinence de la stratégie engagée. Ces trois situations, aussi appelées « dialectiques » en raison de leur caractère dynamique, sont emboîtées : une situation de validation est une situation de formulation qui constitue une forme d'action.

tique, mais plutôt en ce qui a trait au réinvestissement et à la capitalisation du savoir. Les élèves « faibles » ne feraient pas la liaison entre les connaissances utilisées dans la situation adidactique et le savoir institutionnalisé. Ils retiendraient ce qui a été institutionnalisé tel quel, sans s'appuyer sur la situation adidactique pour lui donner du sens, et ne seraient donc pas en mesure de l'adapter pour résoudre d'autres problèmes.

Objectif de la recherche et méthodologie

La *théorie des situations didactiques* est fort utile pour élaborer des situations qui favorisent l'engagement mathématique des élèves et qui permettent de donner du sens aux apprentissages. Cependant, l'institutionnalisation prévue au terme d'une situation adidactique semble parfois insuffisante pour donner aux connaissances le statut indispensable de savoirs. Dans notre étude, nous avons choisi de nous intéresser aux modifications qui pourraient être apportées à la TSD pour faciliter la liaison entre la situation adidactique et l'institutionnalisation. Notre recherche vise ainsi l'étude de conditions didactiques favorables à la décontextualisation des connaissances mathématiques dans le cadre de la TSD.

Pour atteindre cet objectif, nous avons d'abord dégagé, dans les écrits scientifiques qui ont examiné la TSD, trois conditions didactiques visant à faciliter le passage d'une connaissance locale à un savoir culturel :

1. procéder à des phases d'institutionnalisation tout au long de l'enseignement (Perrin-Glorian, 1993) ;
2. favoriser l'abstraction de régularités mathématiques (Giroux, 2013) ;
3. présenter une variété de situations mathématiques (Giroux, 2013 ; Salin, 2007).

Sur la base de ces conditions, une séquence d'enseignement composée de quatre situations *à dimension adidactique*[5] a été élaborée. La séquence d'enseignement est le cadre de référence sur lequel nous nous appuyons pour étudier les conditions didactiques favorables à la décontextualisation des connaissances. Cette séquence porte sur la fraction et s'étale sur huit séances d'environ 45 minutes. Elle a été expérimentée auprès de trois

5 Nous appuyant sur Mercier (1995), nous utilisons l'expression « situation à dimension adidactique », car nous apportons certaines adaptations qui conduisent à ne pas respecter l'ensemble des conditions qui caractérisent une situation adidactique.

groupes composés chacun de trois élèves âgés de 11 et 12 ans considérés en difficulté par leur enseignant. La décontextualisation apparaissant particulièrement ardue chez les élèves en difficulté, il semble pertinent de mettre à l'épreuve les conditions retenues auprès de ce public d'élèves.

Chacune des séances de la séquence est filmée et transcrite, et les productions des élèves sont conservées. Ceci permet une reconstruction fidèle de la séquence d'enseignement auprès de chacun des groupes d'élèves. Nous appuyant sur l'ingénierie didactique d'Artigue (1988, 1996, 2002), nous procédons à la confrontation d'analyses *a priori / a posteriori* des stratégies et connaissances engagées par les élèves ainsi qu'à la caractérisation des interactions didactiques. Une attention particulière est effectivement portée aux interactions didactiques, de manière à analyser les interventions clés et les moments sensibles. C'est en somme la nature du contrat didactique qui est finement analysée dans le déroulement des séances pour chacun des groupes, afin de cerner l'effet des conditions didactiques choisies sur l'apprentissage des élèves. Précisons, par ailleurs, que l'analyse est chronologique à l'intérieur d'une même situation, et chronologique également d'une situation à l'autre. L'importance de certains éléments se révèle ainsi par leur répétition au fur et à mesure de l'analyse.

Première condition : institutionnalisation en filigrane tout au long de l'enseignement

Selon Perrin-Glorian (1993), pour éviter la rupture entre les situations adidactiques et l'institutionnalisation, il serait nécessaire que les élèves aient un projet de décontextualisation au moment même de résoudre le problème proposé. Autrement dit, les élèves, lorsqu'ils recherchent une solution au problème, doivent également avoir le projet d'acquérir des connaissances, ce qui les conduit à rechercher, parmi les *artifices didactiques* (Brousseau, 1998), les éléments qui ont un caractère universel et qui pourront être réutilisés dans d'autres occasions. Dans cette perspective, le fait de réfléchir à l'intention didactique poursuivie ne serait pas nuisible à l'apprentissage, mais pourrait au contraire participer à la décontextualisation des connaissances. Perrin-Glorian suggère ainsi que l'institutionnalisation se déroule tout au long de l'enseignement, et non seulement en fin de processus, pour qu'elle soit un moteur de l'avancement du contrat didactique.

La question de l'articulation entre les situations adidactiques et l'institutionnalisation est cependant délicate, car si les moments d'institutionnalisation fréquents sont favorables à la décontextualisation des connaissances, l'enseignant ne peut dévoiler entièrement son projet. Non seulement cela empêcherait les élèves de construire eux-mêmes leurs apprentissages, mais le jeu n'aurait alors plus aucun intérêt. Pour mettre en valeur les éléments importants et éviter que certains élèves retiennent des éléments du contexte qui ne sont pas pertinents pour la compréhension du savoir, Douady (1984) propose de procéder à des *institutionnalisations locales*, où l'enseignant sélectionne, dans ce qui a été fait et dit par les élèves, ce qui est mathématiquement intéressant et réinvestissable. Contrairement à l'institutionnalisation où sont présentées des connaissances décontextualisées et dépersonnalisées, l'institutionnalisation locale est attachée au contexte. Elle vise à éclairer les élèves sur certaines connaissances mobilisées au cours de la situation, les préparant ainsi à l'institutionnalisation qui se fera au terme de la situation.

Selon nos analyses, la validation du milieu constitue un moment privilégié pour procéder à des institutionnalisations locales. Lors de ces moments, l'expérimentatrice relève les connaissances mathématiques investies par les élèves dans la situation adidactique non seulement à l'oral, mais aussi à l'écrit. Par exemple, dans l'une de nos situations — qui s'inspire d'un travail de Salin (2006) —, une bande de papier d'environ 40 cm est remise aux élèves et ceux-ci doivent anticiper le nombre de bandes correspondant à 1/4 de cette bande nécessaire pour obtenir une bande-unité. Les bandes de 1/4 sont placées sur un bureau éloigné de manière à rendre inefficace la stratégie non numérique consistant à évaluer approximativement le nombre de bandes de 1/4 nécessaire pour obtenir une bande. Les élèves recherchent ensemble la solution au problème et doivent formuler une prévision commune, les amenant ainsi non seulement à verbaliser, mais parfois aussi à confronter leur stratégie. Ensuite, l'un d'eux va chercher le nombre de bandes de 1/4 choisi. Ces bandes sont placées bout à bout sous la bande-unité, ce qui permet aux élèves de juger de la justesse de leur prévision selon s'ils obtiennent ou non la même longueur. Bien souvent, lors de la validation, les élèves se contentent de regarder s'ils ont réussi ou échoué. L'expérimentatrice identifie alors les éléments importants à l'égard du savoir. Ainsi, elle conclut en mentionnant « il faut 4 bandes correspondant à 1/4 de bande-unité pour obtenir 1 bande-unité ; 1/4 entre 4 fois dans 1 », et leur présente l'écriture $4 \times 1/4 = 4/4 = 1$. Les échanges à l'oral s'appuient sur la situation adidactique pour donner du sens aux relations numériques, qui elles sont écrites, mettant ainsi en valeur les connaissances mathématiques investies dans la situation. Les mêmes relations numériques (en l'occurrence $b \times 1/b = b/b = 1$) sont travaillées à partir de différents nombres et en faisant référence à différentes situations. L'écriture est ainsi un outil précieux pour aider les élèves à lier entre elles les différentes situations par le biais du savoir.

L'analyse de notre séquence nous conduit par ailleurs à soulever l'importance, pour favoriser la décontextualisation des connaissances, d'utiliser un langage précis centré sur le savoir en jeu et les relations mathématiques impliquées, plutôt qu'un langage centré sur le contexte. Le contexte vise à soutenir les relations numériques, mais ne doit toutefois pas distraire les élèves de l'enjeu mathématique. Un langage inapproprié, soit par imprécision ou par souci de familiarité, pourrait noyer, écraser les relations mathématiques. L'analyse des interactions entre l'expérimentatrice et les élèves permet de constater la multiplication de termes employés pour un même objet ainsi que l'importance accordée au contexte. Par exemple, lors de la situation présentée précédemment, l'expérimentatrice donne la consigne suivante : « Vous devez aller chercher, sur le bureau là-bas, le nombre de morceaux de 1/4 de bande nécessaire, pour que, quand on place les morceaux un à côté de l'autre ici, on obtienne une bande-unité ». Pour aider les élèves à identifier les éléments importants à l'égard du savoir mathématique, il aurait été préférable d'utiliser un langage précis centré sur les relations mathématiques, par exemple, en formulant la consigne ainsi : « Vous devez identifier le nombre de bandes correspondant à 1/4 de la bande-unité nécessaire pour obtenir une bande-unité ». Il semble ainsi important que l'institutionnalisation soit présente en filigrane tout au long de la situation adidactique, et ce, tant pour l'enseignant que pour les élèves.

Deuxième condition : abstraction de régularités mathématiques

Pour aider les élèves à se détacher de la situation adidactique, Giroux (2013) suggère « de favoriser le repère et l'abstraction de régularités mathématiques qui elles-mêmes favorisent la transformation de connaissances en savoirs ». L'identification de régularités permet aux élèves d'anticiper la réponse du milieu et donc, d'exercer un contrôle sur la situation. Ce contrôle est essentiel pour l'apprentissage, car il suppose de considérer qu'il est possible de traiter le réel à partir d'une structure, d'un modèle mathématique. Abstraire des régularités semble ainsi une entrée intéressante pour favoriser la mise en relation entre les situations adidactiques et l'institutionnalisation.

Dans la séquence d'enseignement que nous avons élaborée, l'écriture mathématique est utilisée de manière à favoriser l'identification, par les élèves, de régularités mathématiques. Ainsi, à plus d'une reprise, des listes de fractions équivalentes sont produites en prenant appui sur une situation adidactique. Par exemple, dans l'une des situations de notre séquence, un cercle partitionné en deux parties d'aire égale est remis aux élèves. Dans chacune des parties est inscrite la fraction 1/2. La tâche consiste à compléter le bon de commande suivant :

Partie A : J'ai besoin de ____ pièces de 1/4 du cercle pour recouvrir 1/2 cercle.
Partie B : J'ai besoin de ____ pièces de 1/6 du cercle pour recouvrir 1/2 cercle.

L'expérimentatrice remet ensuite aux élèves les pièces qu'ils ont commandées. En superposant les pièces reçues sur la partie du cercle à recouvrir, les élèves reçoivent une rétroaction sur la prévision qu'ils ont formulée par leur bon de commande. Cette situation conduira par la suite à la production d'une liste de fractions équivalentes à 1/2 [6]: 1/2 = 2/4 = 3/6. L'expérimentatrice prend ainsi appui sur ce que les élèves ont réalisé au cours de la situation adidactique pour produire avec eux une liste de fractions équivalentes et demande ensuite aux élèves de trouver d'autres fractions équivalentes. Cette tâche conduit à des échanges sur un enjeu de savoir essentiel dans l'apprentissage des fractions, soit la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur. Nos résultats, tout comme ceux de Giroux (2013), montrent que les élèves sont très sensibles aux régularités. Dans les trois groupes, les élèves prennent plaisir à ajouter de nouvelles fractions en choisissant des termes de plus en plus grands. À plus d'une reprise, lorsque l'expérimentatrice les arrête pour passer à une autre activité, les élèves rétorquent qu'ils pourraient en trouver encore « plein d'autres » ! L'expérimentatrice en profitera alors pour institutionnaliser l'existence d'une infinité de fractions désignant le même nombre. Enfin, le fait de dégager des régularités permet d'exercer un contrôle sur la situation et favorise ainsi l'engagement mathématique des élèves. L'identification de régularités permet de produire de nouvelles

6 Il est à noter qu'avant de produire une liste de fractions équivalentes, la relation $a \times 1/b = a/b$ est travaillée avec les élèves en s'appuyant, à l'oral, sur la situation adidactique : *a* pièces de 1/*b* permet de recouvrir *a/b* du cercle.

fractions équivalentes en adoptant des stratégies numériques, conduisant ainsi les élèves à se détacher de la situation adidactique. Cependant, d'autres régularités que celles visées par l'enseignement sont parfois identifiées. Par exemple, prenant appui sur ce qui a été réalisé au cours d'une situation adidactique, la liste de fractions équivalentes suivante est produite : 1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8. L'expérimentatrice impose ensuite un dénominateur (12) et demande aux élèves d'identifier le numérateur. Pour compléter la fraction (?/12), certains élèves s'appuient sur les numérateurs précédents (1, 2, 3, 4) et écrivent 5. Ces résultats conduisent à réfléchir au rapport entre l'identification de régularités numériques et la référence au milieu de l'action. Il n'y a, dans cette tâche, aucune contrainte qui conduise les élèves à référer aux connaissances investies dans la situation adidactique. Le contrôle par les régularités se différencie du contrôle par le sens. L'écriture mathématique favorise l'identification de régularités qui peuvent conduire à l'abstraction d'une règle rattachée au savoir visé. Or, il semble important que les élèves puissent valider cette règle, lui donner un sens, ce qui est, d'une certaine manière, la visée de la situation adidactique.

Les écritures mathématiques produites au cours d'une situation adidactique, plutôt qu'au terme de celle-ci, facilitent l'articulation entre le contrôle par le sens et le contrôle par les régularités. Nous présentons ici un exemple de tâche qui a favorisé une telle articulation. Nous appuyant sur un problème tiré de Lamon (2008), l'une de nos situations met en rapport la taille de bonshommes exprimée à partir de deux unités de mesure. Ainsi, les élèves reçoivent le dessin d'un bonhomme et le mesurent en utilisant des trombones, puis des boutons. Un second bonhomme leur est remis, lequel est mesuré à partir d'une seule des unités. La tâche consiste à prévoir combien ce bonhomme mesure si on utilise la seconde unité de mesure. La rétroaction est finalement assurée par le mesurage du bonhomme à l'aide de l'unité de mesure appropriée. Pour favoriser le recours à des stratégies numériques, au fur et à mesure, les données sont compilées dans un tableau comme celui-ci :

	Trombones	Boutons
Bonhomme A	2	3
Bonhomme B	4	6
Bonhomme C	?	15
Bonhomme D		

Notre recherche montre que la présence d'un tel tableau conduit les élèves à rechercher des régularités numériques pour anticiper les résultats. Beaucoup d'élèves, en observant les données inscrites dans le tableau, s'appuient sur des stratégies additives pour dégager des régularités. Un groupe d'élèves, par exemple, anticipe que la mesure manquante du *Bonhomme C* est de 12 trombones en observant l'écart entre la mesure en trombones et en boutons des bonshommes précédents. Cet écart étant de 1 pour le *Bonhomme A* et de 2 pour le *Bonhomme B*, les élèves anticipent qu'il sera de 3 pour le *Bonhomme C*. Cette stratégie sera mise en échec lors de la rétroaction du milieu. Ainsi, lorsque les élèves retiennent une prévision en s'appuyant sur une régularité qui ne fait pas appel au savoir en jeu, ils rencontrent l'inadéquation de leur stratégie au moment de la validation du milieu et cherchent alors à interpréter la rétroaction reçue. Cette tâche, contrairement à la précédente, favorise une articulation entre l'identification de régularités numériques et la référence à la situation adidactique.

Notons, par ailleurs, qu'une fois que les élèves ont dégagé une stratégie numérique leur permettant rapidement d'obtenir une solution juste, ils ne ressentent généralement plus le besoin de s'appuyer sur la situation adidactique. Bien que certains élèves qui utilisent une stratégie numérique valide, sans en contrôler le sens, cherchent à comprendre ce qui fonde le résultat, le plus souvent, lorsqu'une stratégie numérique est utilisée efficacement, le retour à la situation adidactique favorise peu l'engagement des élèves. Si effectivement les élèves utilisent une règle sans toutefois maîtriser les relations engagées, ils risquent de ne pas être en mesure de l'utiliser ultérieurement, avec d'autres nombres ou dans d'autres contextes. C'est à ce moment, selon nous, que le sens devrait à nouveau être travaillé. Dans cette perspective, le sens ne précède pas l'identification de régularités ni l'inverse d'ailleurs. Il convient plutôt de favoriser des allers-retours entre un travail sur le sens et un travail sur l'identification de règles numériques, sans toutefois revenir à une stratégie plus élémentaire lorsque les élèves mettent en œuvre une stratégie numérique valide.

Troisième condition : situations mathématiques variées

La condition didactique relative à la présentation d'une variété de situations mathématiques s'appuie, d'une part, sur Salin (2007) qui propose de présenter non seulement des situations adidactiques, mais également des situations intermédiaires, ainsi que sur Giroux (2013) qui suggère de présenter des situations qui font appel à différentes formes d'utilité du savoir.

Situations adidactiques et situations intermédiaires

La séquence d'enseignement que nous avons élaborée prévoit non seulement des situations adidactiques, mais également des situations intermédiaires, c'est-à-dire des exercices conventionnels. Ces exercices impliquent soit un contexte intramathématique[7], soit des contextes extramathématiques qui diffèrent de celui de la situation adidactique. Ils visent ainsi à amener les élèves à utiliser les connaissances développées dans la situation adidactique dans d'autres occasions.

Nos résultats, tout comme ceux de Perrin-Glorian (1993) et de Bloch et Salin (2004), montrent les difficultés des élèves à réinvestir les connaissances utilisées dans une situation adidactique lorsqu'ils font face à de nouveaux problèmes. Par exemple, dans l'une des situations adidactiques de notre séquence, les élèves identifient avec succès le nombre de *1/b* d'une bande-unité nécessaire pour obtenir 1 bande-unité. Par la suite, un énoncé de problème de même structure impliquant un contexte différent est présenté : « Un spectacle dure 1 heure. Si chaque numéro présenté dure 1/b heure, combien de numéros pourra-t-on présenter ? ». La plupart des élèves n'établissent pas le lien entre cette situation intermédiaire et la situation adidactique. La conduite la plus fréquente consiste, pour éviter le traitement des fractions, à tenter de transformer 1/*b* heure en minutes, même si la valeur de *b* rend cette stratégie coûteuse (*b* n'étant pas un diviseur de 60). Ainsi, lorsque les élèves ne maîtrisent pas suffisamment le concept en jeu, la différence relative à l'habillage du problème l'emporte, car les connaissances qu'ils possèdent ne leur permettent pas de lier les situations entre elles.

Notre recherche soulève par ailleurs la question du contenu des situations intermédiaires. Dans notre séquence, le plus souvent, uniquement l'habillage des problèmes est modifié. Or, il arrive également que le contenu de certaines situations intermédiaires déborde de celui présenté en situation adidactique, visant ainsi à favoriser la coordination

7 Un contexte est considéré comme intramathématique lorsqu'on se réfère uniquement à des objets, des symboles ou des structures mathématiques et qu'aucun thème extérieur au monde des mathématiques n'est évoqué ; il est au contraire considéré comme extramathématique lorsqu'on se réfère à des objets du monde réel (PISA, 2009).

de connaissances. Par exemple, dans la première situation, après que les élèves aient complété l'énoncé suivant : « J'ai besoin de 2 pièces correspondant à ____ du rectangle pour recouvrir 1/3 de ce rectangle », des questions faisant appel aux relations scalaires sont présentées telles que « Qu'est-ce qui est 2 fois plus petit que 1/3 ? ». Cet exercice conduit les élèves à établir l'équivalence entre « ce qui entre 2 fois dans 1/3 », « ce qui est 2 fois plus petit que 1/3 » et également, dans un groupe, « 1/3 ÷ 2 ». Enfin, la gestion didactique de l'écart entre les situations adidactique et intermédiaire est délicate, car s'il arrive que la présentation d'exercices dont le contenu déborde celui de la situation adidactique favorise la coordination de connaissances, il arrive également que des élèves soient incapables de résoudre des problèmes qui reposent pourtant exactement sur le même contenu que celui de la situation adidactique. Enfin, les situations doivent être choisies en fonction des connaissances que possèdent les élèves. Or, il est impossible d'identifier avec certitude les relations que les élèves établiront entre les situations.

Situations sollicitant différentes formes d'utilité du savoir

Par ailleurs, considérant que les difficultés en mathématiques des élèves ne proviennent pas d'un manque de connaissances, mais plutôt de relations inopérantes entre leurs connaissances et les situations mathématiques pour lesquelles ces connaissances sont utiles, Giroux (2013) propose, pour aider les élèves à reconnaître l'utilité de leurs connaissances, de varier les situations mathématiques qui marquent chacune une forme d'utilité différente de la connaissance. La variété dont il est ici question dépasse largement l'habillage du problème. Selon la *Théorie des champs conceptuels* de Vergnaud (1990), un concept mathématique se développe à partir de situations mathématiques variées qui permettent d'aborder différents sens de ce concept et d'abstraire ses propriétés essentielles en dégageant les invariants dans les situations présentées. Le choix des situations est donc déterminant et nécessite une analyse épistémologique du savoir visé. Notre séquence d'enseignement portant sur l'équivalence des fractions, nous nous sommes appuyées sur les études de Kieren (1976, 1980, 1989) qui permettent de mieux cerner le champ conceptuel des fractions. Cinq interprétations de la notion de fraction sont dégagées : (1) la fraction partie/tout, (2) la fraction mesure, (3) la fraction rapport, (4) la fraction quotient, (5) la fraction opérateur. L'interprétation de la fraction en tant que partie d'un tout est incontestablement la plus sollicitée, au Québec, dans les manuels scolaires du primaire.

En ce qui a trait à l'équivalence des fractions, l'enseignement s'appuie généralement sur le fait que deux fractions sont équivalentes si elles permettent de relever la même part d'un tout continu de référence, sollicitant ainsi l'interprétation partie/tout. Il est pourtant fort important de proposer des situations qui amènent les élèves à interpréter l'équivalence des fractions en termes de proportions : deux fractions ne sont alors pas équivalentes parce qu'elles représentent la même quantité, mais parce qu'elles représentent le même rapport.

La séquence que nous avons élaborée est composée de quatre situations qui s'appuient chacune sur une interprétation différente de la fraction. Nos résultats, comme prévu, montrent que la présentation de situations variées sur l'équivalence des fractions permet de confronter les élèves à des situations dans lesquelles l'équivalence n'est pas considérée strictement du point de vue de l'égalité de parties prises sur un tout continu. De plus, le choix de nos situations et de leurs contraintes génère l'élaboration de stratégies qui varient selon les caractéristiques des situations, et l'ordonnancement des situations au sein de la séquence participe à l'élargissement du caractère d'utilité du savoir par les relances qu'il favorise sur la notion de fractions équivalentes d'une situation à l'autre. Nos analyses nous conduisent cependant à constater une limite de notre séquence : bien souvent, les élèves ne semblent pas établir les relations entre les différentes situations par le biais du savoir.

Enfin, notre recherche, comme d'autres recherches avant nous, soulève la difficulté des élèves à utiliser les connaissances acquises en situation adidactique lors de la présentation de nouvelles situations. Une réflexion sur la manière d'articuler les différentes situations pourrait être envisagée pour amener les élèves, de façon autonome, à établir la relation entre les différentes situations. Dans notre séquence, les situations intermédiaires sont généralement présentées au terme d'une situation adidactique, de manière à amener les élèves à réinvestir les connaissances qu'ils ont acquises dans de nouveaux contextes. Quant aux quatre situations présentées (qui sollicitent chacune une forme d'utilité différente de la fraction), elles se succèdent les unes après les autres, s'étalant chacune sur deux séances d'environ 45 minutes. Une avenue à explorer serait de privilégier un va-et-vient plus soutenu entre les différents types de situations. Nous émettons ainsi l'hypothèse qu'il serait préférable de présenter des situations intermédiaires tout au long des situations adidactiques et de privilégier une alternance entre les situations faisant appel à différentes formes d'utilité du savoir (en l'occurrence, à différentes interprétations de la fraction), afin d'éviter que les élèves n'associent trop fortement les connaissances développées à un contexte particulier.

Conclusion

La contextualisation des connaissances, notamment par le biais de situations adidactiques, est fort utile pour permettre aux élèves de donner du sens à leurs apprentissages. L'institutionnalisation, qui vise la décontextualisation des connaissances, est en quelque sorte la conséquence d'un apprentissage contextualisé. Elle permet d'identifier, dans la situation, ce qui relève du savoir mathématique et qui pourra être utilisé pour résoudre d'autres problèmes. Si, selon la TSD, l'institutionnalisation a lieu au terme d'une situation, il semble pertinent qu'elle soit également présente en filigrane tout au long de l'enseignement de manière à mettre en évidence, tant par le langage utilisé que par l'écriture, les éléments importants à l'égard du savoir. Notre recherche suggère effectivement que les phases d'institutionnalisations locales permettent d'accompagner les élèves dans la décontextualisation de leurs connaissances sans que leur engagement mathématique soit affecté.

De plus, plusieurs recontextualisations, dans des situations variées faisant appel à différentes formes d'utilité du savoir, apparaissent indispensables pour qu'il y ait abstraction des propriétés constitutives du savoir. Dans cette perspective, la décontextualisation et la recontextualisation des connaissances se nourrissent simultanément. En effet, les élèves sont appelés, lorsqu'ils font face à une nouvelle situation, à utiliser les connaissances qu'ils possèdent, mais aussi à les adapter en fonction des contraintes spécifiques à la situation en question, ce qui les conduit à redéfinir et à préciser leurs connaissances. Comme le souligne Sarrazy (2005), on n'apprend pas à suivre une règle, mais plutôt à agir conformément à la règle. Autrement dit, les allers-retours entre les connaissances en tant qu'outils pour résoudre un problème et les connaissances en tant qu'objets pour la construction du savoir culturel permettent de rendre de plus en plus explicites les connaissances utilisées en situation (Douady, 1984). Le va-et-vient entre les moments de contextualisation et de décontextualisation conduit ainsi les élèves à des « niveaux d'abstraction de plus en plus élaborés » (Barallobres, 2015). Cela dit, le passage d'une connaissance locale à un savoir culturel et universel se fait progressivement. Il exige une expérience avec des situations variées et donc, inévitablement, un certain temps.

Références

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *9*(3), 281–308.

Artigue, M. (1996). Ingénierie didactique. Dans J. Brun, *Didactique des mathématiques* (pp. 243–274). Paris, France : Delachaux et Niestlé.

Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui ? *Didactique des disciplines scientifiques et technologiques : concepts et méthodes*, *8*, 59–72.

Barallobres, G. (2015). *Difficultés en mathématiques, difficultés d'abstraction : des liens nécessaires entre enseignement et apprentissage* (Document inédit). Montréal, QC : UQAM.

Bessot, A. (2011). L'ingénierie didactique au coeur de la recherche en théorie des situations didactiques. Dans Margolinas C. et al. (dir.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 29–56). Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

Bloch, I., & Salin, M. H. (2004). *Contrats, milieux, représentations : étude des particularités de l'AIS*. Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques. Paris, France : Université Paris.

Brousseau, G. (1988). Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'A.M.Q*, *28*(2), 14–24.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, France : La Pensée sauvage.

Conne, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *12*(2), 221–270.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques* (Thèse de doctorat). Université Paris 7, Paris, France.

Giroux, J. (2013). Étude des rapports enseignement/apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire : problématique et repères didactiques. *Éducation et didactique*, *7*(1), 59–86.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations or rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: Papers form a research workshop* (pp. 101–144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct: Its element and mechanism. In T.E. Kieren, *Recent Research on Number Learning* (pp. 125–149). Colombus, OH: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. E. (1989). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162–181). Reston, VA: Lawrence Erlbaum.

Lamon, S. J. (2008). *Teaching fractions and ratios for understanding* (2nd ed.). New York, NY: Routledge.

Mercier, A. (1995). Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations adidactiques. *Les débats de didactique des mathématiques*, *157*, 168.

Perrin-Glorian, M.-J. (1993). Questions didactiques à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles. *Recherches en didactique des mathématiques*, *1.2*(13), 5–118.

Piaget, J. (1970). *L'épistémologie génétique*. Paris, France : Presses Universitaires de France.

PISA. (2009). *Le cadre d'évaluation de PISA 2009 : les compétences clés en compréhension de l'écrit, en mathématiques et en sciences*. OCDE.

Salin, M.-H. (2006, mai). *Situations et assortiments d'exercices pour l'enseignement des mathématiques destiné aux élèves de collège en grande difficulté scolaire*. Communication présentée au Colloque EMF, L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés, Sherbrooke, QC.

Salin, M.-H. (2007). À la recherche de milieux adaptés à l'enseignement des mathématiques pour des élèves en grande difficulté scolaire. Dans J. Giroux et D. Gauthier (dirs.), *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques* (pp. 195–217). Montréal, QC : Bande didactique.

Sarrazy, B. (2005). La théorie des situations : une théorie anthropologique des mathématiques ? Dans M.-H Salin, P. Clanché, & B. Sarrazy, (dir.), *Autour* *de la théorie des situations. Questions, réponses, ouverture. Hommage à Guy Brousseau* (pp. 375–390). Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10* (2.3), 133–170.